



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»
(БГТУ)

Политехнический колледж (ПК БГТУ)

УТВЕРЖДАЮ Ректор
ФГБОУ ВО "БГТУ"

_____ О.Н. Федонин

«28» мая 2024 г.

Методические рекомендации для проведения практических работ

по учебной дисциплине

ЕН.01 Математика

Специальность:	38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)
Уровень образования выпускника:	среднее профессиональное образование (СПО)
Программа подготовки специалиста среднего звена (ППССЗ):	Базовая
Присваиваемая квалификация:	Бухгалтер
Форма обучения:	заочная
Срок получения СПО по ППССЗ:	3 года 10 месяцев
Уровень образования, необходимый для приема на обучение по ППССЗ:	основное общее образование
Год приема на обучение на 1-й курс:	2024

Брянск 2024

Методические рекомендации для проведения практических работ по учебной дисциплине ЕН.01 Математика для специальности **38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)** предназначены для закрепления знаний по изучаемому материалу и формированию умений, а также для проверки усвоения теоретического материала и умений решать различные математические задачи.

Разработали:

Преподаватель ПК БГТУ

И.П. Парфёнова

МР рассмотрена одобрена предметной комиссией

«Математических и общих естественно научных дисциплин»

от «28» мая 2024 г., протокол №7

Заместитель директора ПК БГТУ по

Л.А Лазарева

учебной работе,

Область применения методических указаний

Методические указания для выполнения практических работ являются частью примерной основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС по специальности СПО **15.02.14 «Оснащение средствами автоматизации технологических процессов и производств (по отраслям)».**

1.2. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины:

Код ПК, ОК	Умения	Знания
ОК 1 ОК 2	Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений Решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости Применять методы дифференциального и интегрального исчисления Решать дифференциальные уравнения Пользоваться понятиями теории комплексных чисел	Основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии Основы дифференциального и интегрального исчисления Основы теории комплексных чисел

1.3. Рекомендуемое количество часов на освоение рабочей программы учебной дисциплины:

максимальной учебной нагрузки обучающегося 70 часов, в том числе:

обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося 64 часа;

практические работы 30 часов

самостоятельной работы обучающегося 4 часа.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

1	Действия с комплексными числами в алгебраической форме
2	Действия с комплексными числами в тригонометрической форме
3	Элементы векторной алгебры Вычисление пределов
4	Исследование функции на непрерывность. Классификация точек разрыва
5	Нахождение производных сложных функций
6	Уравнение касательной и нормали
7	Полное исследование функции. Построение графика
8	Вычисление первообразной и определенных интегралов. Физическое и геометрическое приложение интегралов
9	Дифференцирование функций двух переменных. Исследование функции двух переменных на экстремум
10	Вычисление двойных интегралов. Практическое применение двойных интегралов.
11	Исследование рядов на сходимость
12	Решение дифференциальных уравнений
13	Действия с матрицами
14	Вычисление определителей матриц
15	Нахождение обратной матрицы. Решение простейших матричных уравнений
16	Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы

17	Решение систем линейных уравнений методом Гаусса
18	Элементы векторной алгебры
19	Составление уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми
20	Составление уравнений кривых второго порядка (окружности, эллипса, гиперболы, параболы)

«Действия комплексными числами в алгебраической форме»

Цель: научить выполнять действия с комплексными числами в алгебраической форме

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Определение. Комплексным числом называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$.

При этом число a называется действительной частью числа z ($a = \operatorname{Re} z$), а b – мнимой частью ($b = \operatorname{Im} z$).

Если $a = \operatorname{Re} z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = \operatorname{Im} z = 0$, то число z будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются комплексно – сопряженными.

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2;$$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

Сложение и вычитание

Рассмотрим два комплексных числа, заданных в общем виде $z_1 = a_1 + ib_1$;

$$z_2 = a_2 + ib_2, \text{ тогда } z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

Можно сформулировать правило сложения и вычитания комплексных чисел: при сложении (вычитании) комплексных чисел соответственно складываются (вычитаются) их действительные и мнимые части.

Умножение

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = a + ib$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

(т.е. можно говорить, что перемножаются комплексные числа как многочлены, учитывая, что $i^2 = -1$). Значит, чтобы перемножить два комплексных числа необходимо перемножить их как многочлены, учитывая, что $i^2 = -1$.

Деление

При выполнении деления комплексных чисел пользуются искусственным приёмом: числитель и знаменатель дроби умножают на число, комплексно-сопряженное знаменателю дроби, и поступают далее так, как и при умножении комплексных чисел.

Пример.

$$z_1 = 5 - i;$$

$$z_2 = -2 + 3i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - i}{-2 + 3i} = \frac{(5 - i) * (-2 - 3i)}{(-2 + 3i) * (-2 - 3i)} = \frac{10 - 2i - 15i - 3i^2}{4 - 9i^2} = \frac{13 - 17i}{13} = 1 - i$$

Задания практической работы

1. Даны комплексные числа вычислить $z = z_1 \pm z_2$, $z = z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$

$$1. z_1 = 5 - i; \quad z_2 = 1 + 3i$$

$$16. z_1 = 5 - i; \quad z_2 = 1 + 2i$$

$$2. z_1 = 3 - 4i; \quad z_2 = 1 - i$$

$$3. z_1 = 1 - 5i; \quad z_2 = 1 - 4i$$

$$4. z_1 = 1 - 3i; \quad z_2 = 7 - i$$

$$5. z_1 = 1 - i; \quad z_2 = 7 - 3i$$

$$6. z_1 = 1 - i; \quad z_2 = 5 - 4i$$

$$7. z_1 = 3 - 4i; \quad z_2 = 2 - i$$

$$8. z_1 = i; \quad z_2 = 7 - 4i$$

$$9. z_1 = 6 - 5i; \quad z_2 = 1 - i$$

$$10. z_1 = 1 - 5i; \quad z_2 = 2 - 5i$$

$$11. z_1 = 5 - 7i; \quad z_2 = 1 - 3i$$

$$12. z_1 = 3 - 2i; \quad z_2 = 1 - 7i$$

$$13. z_1 = 5 - 2i; \quad z_2 = 2 - i$$

$$14. z_1 = 1 - 5i; \quad z_2 = 2 - 3i$$

$$15. z_1 = 1 - 4i; \quad z_2 = 1 - 2i$$

$$17. z_1 = 3 - i; \quad z_2 = 5 - 2i$$

$$18. z_1 = 1 - 5i; \quad z_2 = 1 - 3i$$

$$19. z_1 = 5 - i; \quad z_2 = 1 - 3i$$

$$20. z_1 = 1 - 3i; \quad z_2 = 2 - 5i$$

$$21. z_1 = 3 - 4i; \quad z_2 = 2 - i$$

$$22. z_1 = 5 - 2i; \quad z_2 = 2 - i$$

$$23. z_1 = 7 - 2i; \quad z_2 = 5 - 3i$$

$$24. z_1 = 7 - 3i; \quad z_2 = 1 - 4i$$

$$25. z_1 = 2 - 3i; \quad z_2 = 5 - 4i$$

$$26. z_1 = 3 - 2i; \quad z_2 = 6 - 5i$$

$$27. z_1 = 1 - 7i; \quad z_2 = 4 - 5i$$

$$28. z_1 = 4 - 5i; \quad z_2 = 1 - 2i$$

$$29. z_1 = 1 - 3i; \quad z_2 = 6 - 5i$$

$$30. z_1 = 3 - 2i; \quad z_2 = 4 - 3i$$

2. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме

$$1) 11) 21) \frac{1-i}{1-2i} - \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i;$$

$$2) 12) 22) \frac{2(1-i\sqrt{3})}{1-i\sqrt{3}};$$

$$3) 13) 23) \frac{1-i}{1-i}^{20} - i^{17};$$

$$4) 14) 24) \frac{(1-2i)(1-2i)}{2-i} - i^{12};$$

$$5) 15) 25) \frac{2(1-i\sqrt{3})}{1-i} - (1-i\sqrt{3});$$

$$6) 16) 26) \frac{(2-i)^2}{1-3i} - (0,1-0,3i);$$

$$7) 17) 27) \frac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)};$$

$$8) 18) 28) \frac{(1-3i)(1-3i)}{3-i} \cdot 2i^{19};$$

$$9) 19) 29) \frac{(1-i\sqrt{3})^2}{2i^5};$$

$$10) 20) 30) \frac{(4-i)^2}{i^8} \cdot 8(2-i^{13});$$

Контрольные вопросы

1. Что такое комплексное число: действительная часть числа, мнимая часть числа?
2. Что такое мнимая единица?
3. Какие числа называются сопряженными?
4. Как представить комплексное число графически?
5. Что такое модуль числа?
6. Что такое аргумент числа?
7. Сколько может быть модулей и аргументов у комплексного числа?
8. Как найти аргумент числа?

Как найти сумму, разность, произведение, частное комплексных чисел

Практическая работа № 2 по теме

«Действия над комплексными числами в тригонометрической форме»

Цель: научить выполнять действия с комплексными числами в тригонометрической форме

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

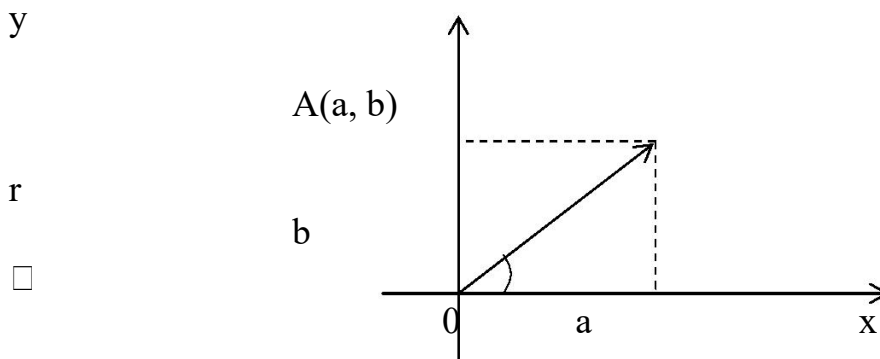
1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси ОХ располагаются действительные числа, а на оси ОУ – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что $a = r \cos \varphi$; $b = r \sin \varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**.

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \quad \operatorname{Arg} z = -\operatorname{Arg} \bar{z}.$$

Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Умножение $z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Деление $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Возведение в степень

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = z z = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра**. (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик).

Извлечение корня из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}) = \sqrt[n]{r} (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$$

Возводя в степень, получим:

$$\sqrt[n]{z}^n = (\cos n\varphi_n + i \sin n\varphi_n) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Отсюда: $\sqrt[n]{r}$; $n \in \mathbb{N}$; $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n})$$

Таким образом, корень n -ой степени из комплексного числа имеет n различных значений. **Задания для практической работы**

Задание. Выполнить действия с данными комплексными :

1) $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 \cdot Z_2$, $Z_1 : Z_2$

1. $z_1 = 8(\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$,
2. $z_1 = 5(\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$,
3. $z_1 = 3(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$,
4. $z_1 = 10(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$,
5. $z_1 = 12(\cos 145^\circ + i \sin 145^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$,
6. $z_1 = 7(\cos 255^\circ + i \sin 255^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$,
7. $z_1 = 9(\cos 168^\circ + i \sin 168^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$,
8. $z_1 = 6(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$,
9. $z_1 = 3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$,
10. $z_1 = 10(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$,
11. $z_1 = 9(\cos 123^\circ + i \sin 123^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$,
12. $z_1 = 5(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$,
13. $z_1 = 3(\cos 235^\circ + i \sin 235^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$,
14. $z_1 = 4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$,
15. $z_1 = 2(\cos 258^\circ + i \sin 258^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$,
16. $z_1 = 7(\cos 115^\circ + i \sin 115^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$,
17. $z_1 = 14(\cos 310^\circ + i \sin 310^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$,
18. $z_1 = 8(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$,
19. $z_1 = 6(\cos 213^\circ + i \sin 213^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$,
20. $z_1 = 9(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$,
21. $z_1 = 4(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$,
22. $z_1 = 6(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$,
23. $z_1 = 3(\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$,
24. $z_1 = 5(\cos 250^\circ + i \sin 250^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$,
25. $z_1 = 8(\cos 85^\circ + i \sin 85^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$,
26. $z_1 = 10(\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$,
27. $z_1 = 9(\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$,
28. $z_1 = 5(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$,
29. $z_1 = 4(\cos 175^\circ + i \sin 175^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$,
30. $z_1 = 16(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$,

2. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

$$1, 11, 21. \frac{i - 1}{1 - i}$$

$$6, 16, 26. \sqrt[3]{1 - i}$$

$$2, 12, 22. \frac{1 - i}{2 + 2i}^6$$

$$7, 17, 27. \sqrt[3]{i} (1 - i)^4$$

$$3, 13, 23. \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - i}^6$$

$$8, 18, 28. \frac{\sqrt{3}}{2 - i}^{12}$$

$$4, 14, 24. \frac{0,5 - 0,5\sqrt{3}i}{0,5\sqrt{3} - 0,5i}^4$$

$$9, 19, 29. \frac{2\sqrt{3} - 2i}{\sqrt{3} - i}^3$$

$$5, 15, 25. \frac{\sqrt{3}}{2 - 12i}^5$$

$$10, 20, 30. \sqrt[3]{3 - 3\sqrt{3}}$$

3. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

$$1) \sqrt[3]{z_1}; \quad 2) z_2^5;$$

$$1. z_1 = 1 - i, z_2 = \sqrt{3} - i;$$

$$6. z_1 = 1 - \sqrt{3}i, z_2 = 2 - 2i;$$

$$2. z_1 = 1 - i, z_2 = \sqrt{3} - i; \quad 7. z_1 = 1 - \sqrt{3}i, z_2 = 2 - 2i;$$

$$3. z_1 = 1 - i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad 8. z_1 = 1 - \sqrt{3}i, z_2 = 2 - 2i;$$

$$4. z_1 = 1 - i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad 9. z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$5. z_1 = 1 - \sqrt{3}i, z_2 = 2 - 2i;$$

$$10. z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Контрольные вопросы

1. Что такое тригонометрическая форма записи комплексного числа?
2. Как перевести число в тригонометрическую форму?
3. Как найти произведение, частное чисел в тригонометрической форме?
4. Как найти возвести число в тригонометрической форме в целую степень?
5. Как найти корень n-ной степени из числа в тригонометрической форме?

Практическая работа № 3

Тема « Вычисление пределов»

Цель: научиться вычислять пределы, раскрывать неопределенности.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

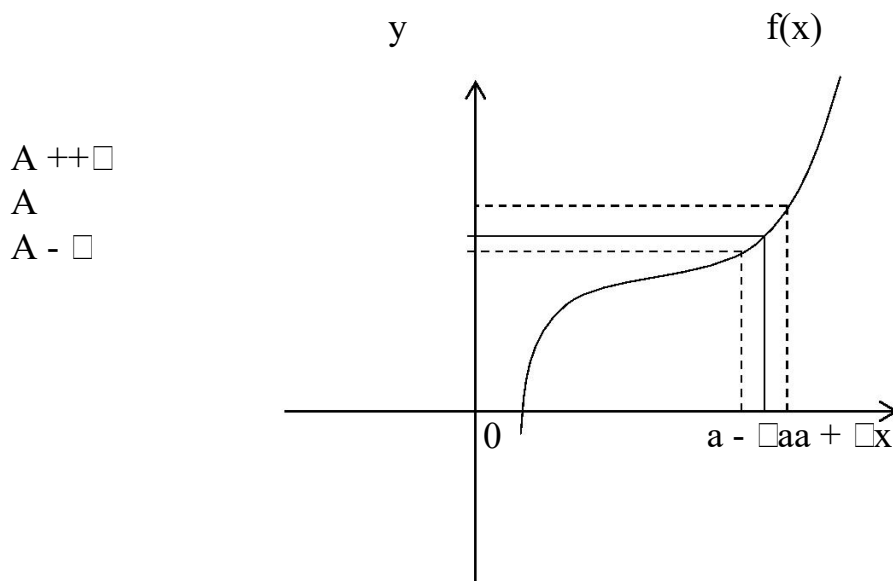
Ход работы

Теоретические положения

Переменная и предел – это основные понятия математического анализа.

Достаточно напомнить, что ключевым словом в определениях таких известных со школы понятий как производная и интеграл является слово предел.

Предел функции в точке.



Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена)

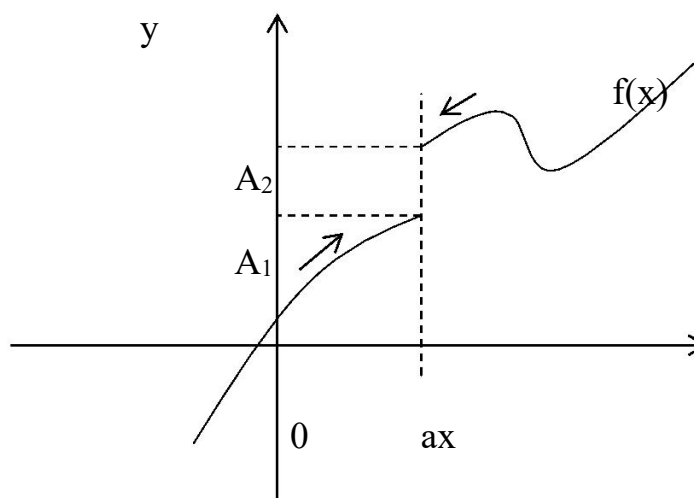
Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

Запись предела функции в точке: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \rightarrow A_1$ при $x \rightarrow a$ только при $x < a$, то $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **слева**, а если $f(x) \rightarrow A_2$ при $x \rightarrow a$ только при $x > a$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x = a$. Также говорят, что A — **конечный предел** функции $f(x)$.

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x , $|x| > M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| \ll$$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$. Аналогично можно определить пределы

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ для любого $x > M$ и

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ для любого $x < M$.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$, где $C = \text{const}$.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow a$.

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Следствие. $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Теорема 4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ при $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Если $f(x) > 0$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $A > 0$.

Аналогично определяется знак предела при $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Теорема 6. Если $g(x) = f(x) \pm u(x)$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$, то и

$\lim_{x \rightarrow a} \pm A$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** вблизи точки $x = a$, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ вблизи точки $x = a$.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow a$, то она ограничена вблизи точки $x = a$. **Бесконечно малые функции.**

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, где a может быть числом или одной из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций:

- 1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
- 2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
- 3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow a$.
- 4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.

Определение. Функция называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, где a – число или одна из величин $+\infty$, $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин $+\infty$, $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. Если $f(x) \neq 0$ при $x \rightarrow a$ (если $x \rightarrow \pm\infty$) и не обращается в ноль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$

Так как $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x \rightarrow 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$.

Так как $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2$ при $x \rightarrow 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$.

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$.

Если α и β – бесконечно малые при $x \rightarrow a$, причем α – бесконечно малая более высокого порядка, чем β , то $\alpha = \beta + \gamma$ – бесконечно малая, эквивалентная β . Это можно доказать следующим равенством

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta + \gamma}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\gamma}{\beta} \right) = 1.$$

Тогда говорят, что β – **главная часть** бесконечно малой функции α

Пример. Функция $x^2 + x$ – бесконечно малая при $x \rightarrow 0$, x – главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем $\alpha = x^2$, $\beta = x$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\alpha + \beta) = 1.$$

Некоторые замечательные пределы.

Первый замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$,

$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$ – многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n (a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n})}{x^m (b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m})} = x^{n-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{при } n = m \\ \infty, & \text{при } n > m \end{cases}$

Второй замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Третий замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{(x - x_0) \cos x \cos x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\cos x \cos x_0} = 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{x - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\pi/4 - x)}{x - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi/4 - x)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x - 2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi/2 - y)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{1} = 3$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1}{y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4y^3 - 12y^2 + 12y - 4}{4y^3 - 12y^2 + 12y - 4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{12y^2 - 24y + 12}{12y^2 - 24y + 12} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y - 2}{2y - 2} = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = e$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$$x^2 - 6x + 8 = 0;$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0;$$

$$D = 36 - 32 = 4;$$

$$D = 64 - 48 = 16;$$

$$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$$

$$x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$$

$$x_2 = (6 - 2)/2 = 2;$$

$$x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 4)}{(x - 2)(x - 6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 4}{x - 6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Пример. Найти предел. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 + x - x^2}}{x^2 - x}$ домножим числитель и

знаменатель дробы на сопряженное выражение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + x^2 - 1 + x - x^2}{x(x - 1)(\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 + x - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x - 1)(\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 + x - x^2})} =$$

$$= \frac{2}{1 \cdot (1 \cdot 1)} = 1.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 3)(x - 3)} = \frac{3 - 2}{3 - 3} = \frac{1}{0}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3), \text{ т.к.}$$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 - x^2x^2 - 5x + 6} = \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-5x^2 + 11x}{-5x^2 + 5x} \\ &= \frac{6x - 6}{6x - 6} \end{aligned}$$

$$\frac{6x - 6}{6x - 6}$$

$$\frac{0}{0} \quad x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{(x - 1)(x - 2)} = 2$$

Пример. Найти предел.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a + 2h) - 2\sin(a + h) + \sin a}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{2a + 2h}{2} \cos \frac{2h}{2} - 2\sin(a + h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin(a + h)(\cosh - 1)}{h^2} \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a + h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2} = 2 \sin a \cdot (1/2) = \sin a \end{aligned}$$

Задания практической работы

1. Найти указанные пределы.

1.1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$ ответ: $\frac{1}{8}$

1.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$ ответ: 1

1.3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}$ ответ: $-\frac{5}{27}$

1.4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$ ответ: $\frac{3}{5}$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 4}{x^2 - 5x + 6} \text{ ответ : нет}$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 + x - x^2}{x^3 - 27} \text{ ответ : нет}$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow 1/8} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1} \text{ ответ : } \frac{4}{9}$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3} \text{ ответ : } \frac{11}{4}$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2} \text{ ответ : } \square \frac{4}{3}$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3} \text{ ответ : } 1$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6} \text{ ответ : } \frac{1}{5}$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1} \text{ ответ : } \square 1$$

$$1.13. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} \text{ ответ : } \frac{8}{9}$$

$$1.14. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3} \text{ ответ : } \frac{13}{4}$$

$$1.15. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3} \text{ ответ : } \frac{1}{5}$$

$$1.16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4} \text{ ответ : } \frac{7}{4}$$

$$1.17. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2} \text{ ответ : } \frac{0}{5}$$

$$1.18. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 2} \text{ ответ : } 0$$

$$1.19. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1} \text{ ответ : } 1$$

$$1.20. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 12} \text{ ответ : нет}$$

$$1.21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10} \text{ ответ : } \square \frac{1}{7}$$

$$1.22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1} \text{ ответ : нет}$$

$$1.23. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 11x - 2}{3x^2 - x - 10} \text{ ответ : } \square \frac{9}{11}$$

$$1.24. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35} \text{ ответ : } \frac{9}{19}$$

$$1.25. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35} \text{ ответ : } \frac{24}{17}$$

$$1.26. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 3x + 15}{x^2 - 6x - 27} \text{ ответ : нет}$$

$$1.27. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5} \text{ ответ : } \frac{4}{3}$$

$$1.28. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8} \text{ ответ : } \frac{1}{23}$$

$$1.29. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4} \text{ ответ : } \frac{22}{5}$$

$$1.30. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3} \text{ ответ : } \frac{1}{8}$$

2. Найти указанные пределы

$$2.1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12} \text{ ответ : } \frac{1}{13}$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 10}{x^3 - 1} \text{ ответ : нет}$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \text{ ответ : } 0$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 8} \text{ ответ : нет}$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^2 + x + 1}{x^4 + 1} \text{ ответ: } 0$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^4 - 1} \text{ ответ: нет}$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 3}{5x^2 + 3x - 3} \text{ ответ: } \frac{5}{23}$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4} \text{ ответ: нет}$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} \text{ ответ: } \square 2$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^3 + 64} \text{ ответ: } \square \frac{3}{16}$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5} \text{ ответ: } \frac{1}{3}$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2} \text{ ответ: } \frac{1}{2}$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5} \text{ ответ: } 0$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10} \text{ ответ: } \square 12$$

$$2.15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x} \text{ ответ: } \frac{17}{2}$$

$$2.16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \text{ ответ: нет}$$

$$2.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x} \text{ ответ: } \frac{5}{7}$$

$$2.18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^2 - 1} \text{ ответ: } 3$$

$$2.19. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 5x - 1}{x^2 - 5x + 6} \text{ ответ: нет}$$

$$2.20. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125} \text{ ответ: } \square \frac{11}{75}$$

$$2.21. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^3 - 64} \text{ ответ: } \frac{1}{48}$$

$$2.22. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{x^2 - 1/4} \text{ ответ: } 6$$

$$2.23. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 4x} \text{ ответ: } \frac{1}{4}$$

$$2.24. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x + 14} \text{ ответ: } 0$$

$$2.25. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10} \text{ ответ: } \frac{4}{11}$$

$$2.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{4x^2 - 5x + 1} \text{ ответ: } 0$$

$$2.27. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 20x + 12} \text{ ответ: } \frac{13}{16}$$

$$2.28. \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^3 + 15x + 18} \text{ ответ: } 0$$

$$2.29. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 11x + 18} \text{ ответ: } \square \frac{10}{7}$$

$$2.30. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4} \text{ ответ: } \frac{48}{29}$$

3. Найти указанные пределы

$$3.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1}$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4}$$

$$3.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$$

$$3.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}$$

$$3.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10}$$

$$3.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x}$$

$$3.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4}$$

$$3.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{3x^2 + x + 1}$$

$$3.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4}$$

$$3.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2}$$

$$3.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x - 3}$$

$$3.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x - 5}{4x^2 - 3x + 2}$$

$$3.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}$$

$$3.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1}$$

$$3.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 4x}{x^3 - 3x + 2}$$

$$3.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4}$$

$$3.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$$

$$3.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{1 + 2x + 7x^2}$$

$$3.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$$

$$3.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 3x + 5}$$

$$3.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8}$$

$$3.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}$$

$$3.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2}$$

$$3.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$$

4. Найти указанные пределы

$$4.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x + 4}{2x^4 + 3x^2 + 1}$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 5}{2x^2 + x + 7}$$

$$4.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7x - 4}{x^5 + 2x - 1}$$

$$4.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x^6}{x^2 - 2x + 5}$$

$$4.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 1}{3x^4 + 2x + 5}$$

$$4.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 + 4}{x^4 + 5x - 1}$$

$$4.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 4x - 5}$$

$$4.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 5x^2 - 4x}{3x^2 + 11x - 7}$$

$$4.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 5x + 9}{1 + 4x - x^3}$$

$$4.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^2 + 3x + 1}$$

$$4.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x + 7}{3x^4 - 2x^2 + x}$$

$$4.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 7x}{2x^2 + 7x - 3}$$

$$4.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 7}{2x^4 + 3x^2 + 1}$$

$$4.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{1 + 2x - x^4}$$

$$4.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{3x^2 - 4x + 1}$$

$$4.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 2}{4x^3 + 2x - 1}$$

$$4.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 + 3x}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$4.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x + 5}{4x^3 - 2x^2 + 1}$$

$$4.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 5x^2 - 3}{2x^2 - x + 7}$$

$$4.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^4 - 2x^3 + 1}$$

$$4.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 4x^3 + 3}{2x^3 + x - 7}$$

$$4.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^3 + 4x^2 - 3}$$

$$4.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 2x^3 + 3}{2x^2 + 3x - 7}$$

$$4.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x^2 - 7}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$4.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 8}{8x^3 - 4x + 5}$$

$$4.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 4}{3x^2 - 4x + 1}$$

$$4.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x + 4}{2x^2 + x - 5}$$

$$4.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 - 3x}{3x^2 + x - 10}$$

$$4.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 10x - 11}{3x^4 - 2x + 5}$$

$$4.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 3x - 4}{2x^2 - 5x + 1}$$

5. Найти указанные пределы

$$5.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{7x^3 - 2x^2 + 1}$$

$$5.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^4 + 2x - 4}$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 3x + 4}{3x^2 - 2x + 1}$$

$$5.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 7}{3x^4 - 5x^2 + 10}$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 - x}$$

$$5.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 5}$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^4 + 3x^2 - 9}$$

$$5.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 4x + 2}{4x^3 + 2x - 5}$$

$$5.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 7x + 1}$$

$$5.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7x + 5}{4x^5 - 3x^3 + 2}$$

$$5.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 6x^4 - x^3}{2x^2 + 6x + 1}$$

$$5.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x - 2x^2}{3x^4 + 5x}$$

$$5.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 3x^4}{2x^3 + 3x^2 - 5}$$

$$5.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + 7x^3 - 3}{3x^2 - 5x + 1}$$

$$5.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 7}{2 - 3x + 4x^2}$$

$$5.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{7x + 5}$$

$$5.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x - 7}{3x^4 + 2x^3 + 1}$$

$$5.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2}{1 + 2x + 3x^2}$$

$$5.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 3}{x^3 - 4x^2 - x}$$

$$5.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 5x}{2x^2 - 3x - 7}$$

$$5.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^4 - 2x^2 + x}$$

$$5.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - x^3}{4x^2 + 3x - 6}$$

$$5.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 4x}$$

$$5.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x - 3x^2}{x^3 - 16}$$

$$5.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 10x + 7}{2x^3 - 3x}$$

$$5.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^5 + 4x^3}$$

$$5.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 13}{x^7 - 3x^5 - 4x}$$

$$5.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 5}$$

$$5.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 81}{3x^2 + 4x + 2}$$

$$5.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 4}{3x^3 - 5x + 1}$$

6. Найти указанные пределы

$$6.1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x} - 2 - \sqrt{4 - x}} \text{ ответ: } 7$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8} \text{ ответ: } \square \frac{\sqrt{8}}{48}$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21} \text{ ответ: } \square \frac{\sqrt{7}}{91}$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6} \text{ ответ: } \frac{1}{10}$$

6.5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$ ответ: $\frac{\sqrt{5}}{20}$ 6.6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$ ответ: $\square\sqrt{3}$

6.7. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$ ответ: $2\sqrt{2}$ 6.8. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$ ответ: $\square 7$

6.9. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$ ответ: $\frac{\sqrt{11}}{286}$ 6.10. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}$ ответ: $\square \frac{\sqrt{2}}{8}$

6.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - 1}$ ответ: 2 6.12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$ ответ: $\square \frac{1}{7}$

6.13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ ответ: 3 6.14. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$ ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6.15. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}$ ответ: $\square \frac{3}{2}$ 6.16. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}$ ответ: $\frac{3}{2}$

6.17. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}$ ответ: $\frac{3}{2}$ 6.18. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}$ ответ: $\frac{1}{9}$

6.19. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}$ ответ: $\frac{5}{4}$ 6.20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}$ ответ: $\square \frac{1}{12}$

6.21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$ ответ: 2 6.22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}$ ответ: $\square 3\sqrt{5}$

6.23. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}}$ ответ: $\square \frac{6}{5}$ 6.24. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}$ ответ: $\square \frac{25}{24}$

6.25. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x}$ ответ: $\square 5$ 6.26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2}$ ответ: $\frac{3}{2}$

6.27. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64}$ ответ: $3\frac{1}{84}$ 6.28. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{8+x} - 3}$ ответ: $\frac{10}{\sqrt{10} \square 3}$

6.29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}$ ответ: $\frac{1}{6}$ 6.30. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}$ ответ: $\frac{1}{18}$

7. Найти указанные пределы

7.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}$ Ответ: e^{12}

7.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}$ Ответ: e^{-12}

$$7.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x} \text{ Ответ: } e^2$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x} \text{ Ответ: } e^3$$

$$7.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x} \text{ Ответ: } e^{10}$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x} \text{ Ответ: } e^{-15}$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x} \text{ Ответ: } e^2$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4} \text{ Ответ: } e^4$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x} \text{ Ответ: } e^{9/2}$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1} \text{ Ответ: } e^{-14}$$

$$7.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2} \text{ Ответ: } e^{-15}$$

$$7.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2} \text{ Ответ: } e$$

$$7.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3} \text{ Ответ: } e^{-6}$$

$$7.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4} \text{ Ответ: } e^{15}$$

$$7.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2} \text{ Ответ: } e^{-32}$$

$$7.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3-2x} \text{ Ответ: } e^{-4}$$

$$7.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^x \text{ Ответ: } e$$

$$7.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-x} \right)^{3x} \text{ Ответ: } e^3$$

$$7.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x} \text{ Ответ: } e^{-1}$$

$$7.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x} \right)^{-2x} \text{ Ответ: } e^{-8/3}$$

$$7.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{-x} \text{ Ответ: } e^{5/2}$$

$$7.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+5} \right)^{x+1} \text{ Ответ: } e^{-1/3}$$

$$7.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{3+2x} \right)^{-x} \text{ Ответ: } e$$

$$7.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2} \text{ Ответ: } e^{-2/3}$$

$$7.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{3-2x} \text{ Ответ: } e^{-2}$$

$$7.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1} \text{ Ответ: } e^{-3/2}$$

8. Найти указанные пределы

$$8.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{5x+7} \right)^{x+1} \text{ Ответ: } 0$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x \text{ Ответ: } \square$$

$$8.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^{3x} \text{ Ответ: } 0$$

$$8.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{4x+1} \right)^{3x-1} \text{ Ответ: } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+8}{x-2} \right)^{x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{3x-1} \right)^{2x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{2x-4} \right)^{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-1} \right)^{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{x+4} \right)^{x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-3}{7x+4} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-5}{3x+4} \right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{4x-5} \right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-2}{3x+1} \right)^{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-4}{x+6} \right)^{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{3x+10} \right)^{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-3}{x+4} \right)^{6x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{3x-1} \right)^{2x}$$

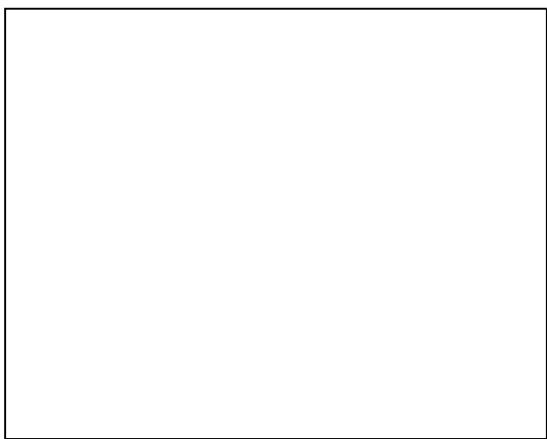
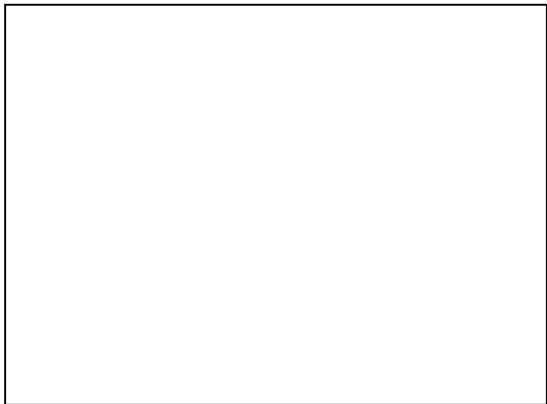
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+5}{x-10} \right)^{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x+7}{x+4} \right)^{4x}$$

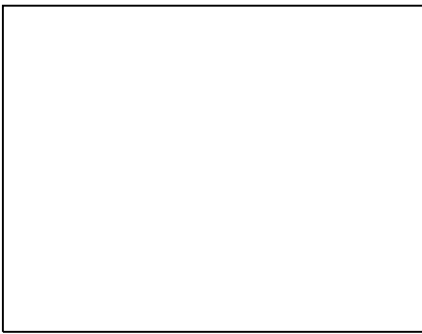
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{4x+5} \right)^{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x-7}{x+6} \right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-4x}{2-x} \right)^{6x}$$



—



—



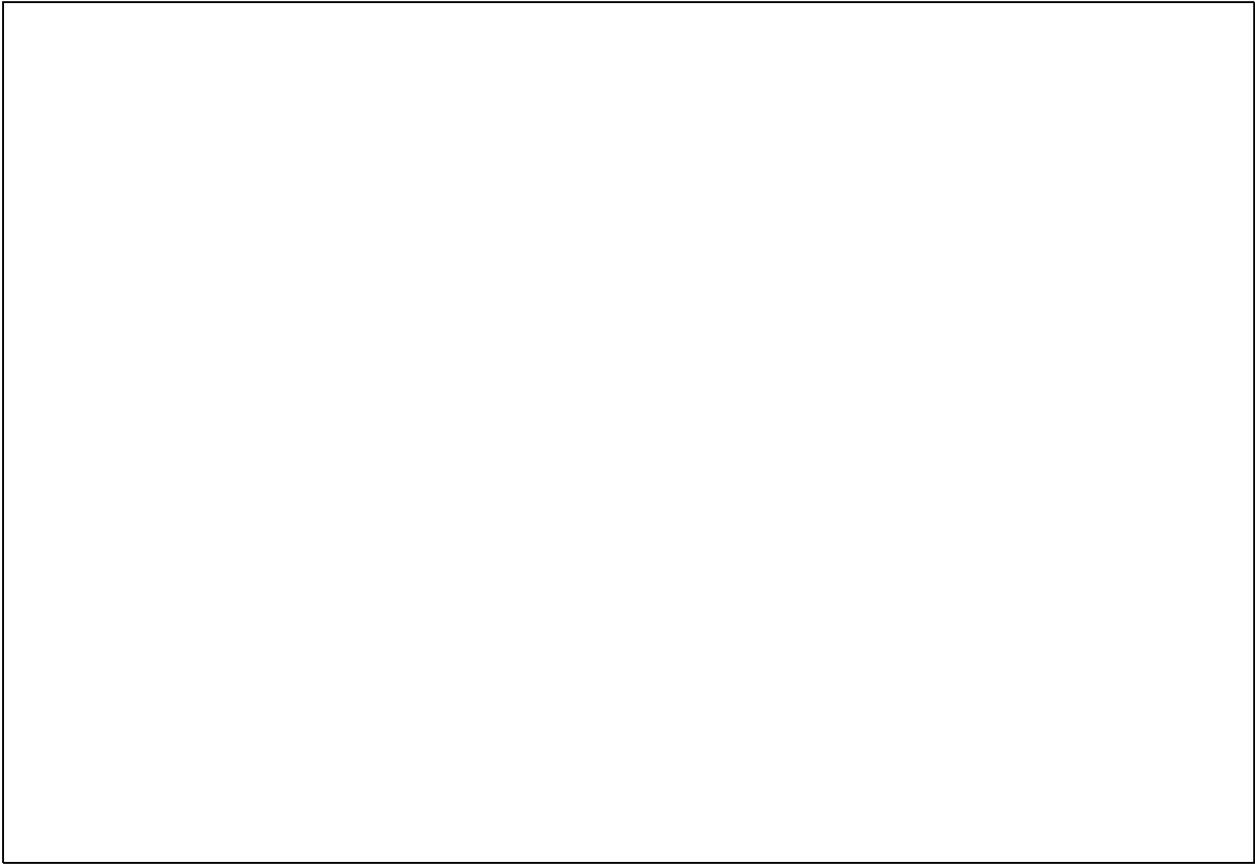
—

—







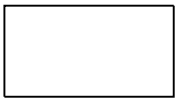




=



=



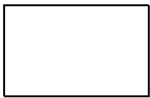
=



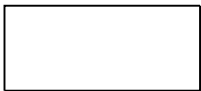
=



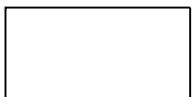
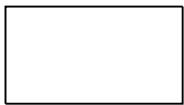
=



=



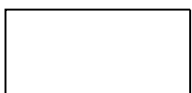
=



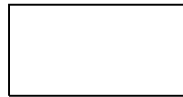
=



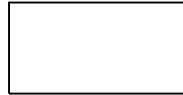
=



=



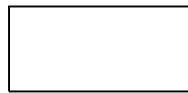
=



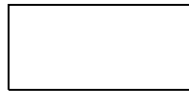
=



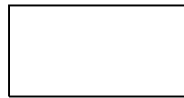
=



=



=



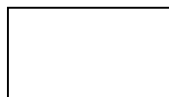
=



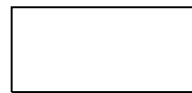
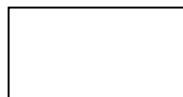
=



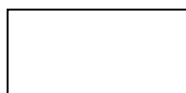
=

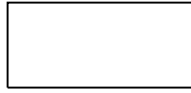
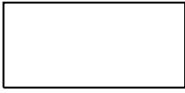


=



=





—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

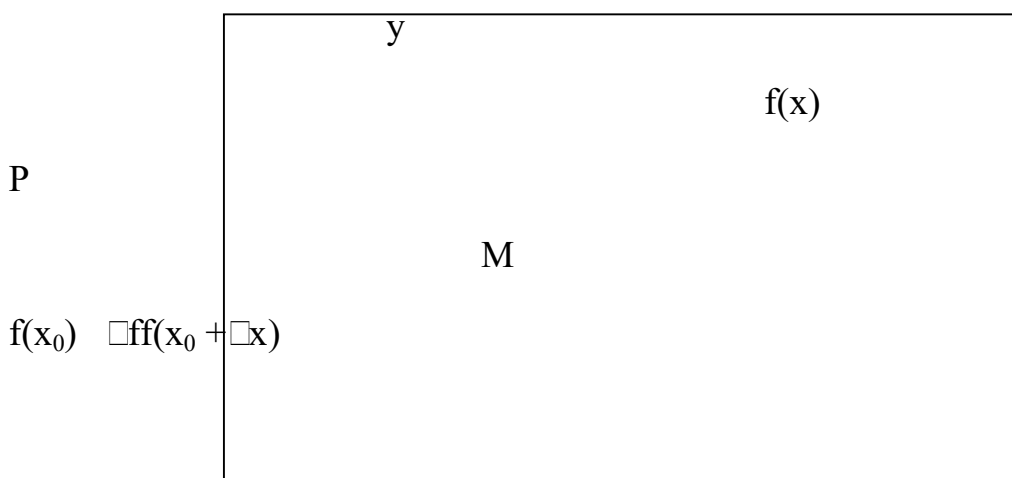
Ход работы

Краткие теоретические сведения.

Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b) . Тогда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ — тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi = K — \text{геометрический смысл производной}$$

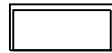
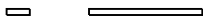
где φ — угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

K — угловой коэффициент касательной.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой-либо точке.

Уравнение касательной к кривой $y = y_0 = f(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой $y = y_0 = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.



||

—

—

—

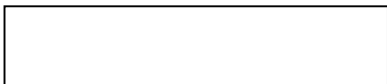
—

||

||

—

—



—

—

—

Пример. Найти производную функции $f(x) = (x^2 - 3x)^{\cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 - 3x$; $v = \cos x$;

Производные этих функций: $u' = 2x - 3$; $v' = -\sin x$;

Окончательно:

$$f'(x) = \cos x \cdot (x^2 - 3x)^{\cos x - 1} \cdot (2x - 3) - (x^2 - 3x)^{\cos x} (\sin x) \ln(x^2 - 3x)$$

Пример. Найти производную функции $y = \cos x \sin x - \frac{1}{2} \cos^2 x$. Сначала

преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos^2 x$

$y' = \frac{1}{2} 2 \cos 2x - \frac{1}{2} 2 \cos x (-\sin x) = \cos 2x + \sin x \cos x$. **Пример.** Найти производную

функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 - 1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 \cdot 2xe^{x^2})(x^2 - 1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} - 2xe^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2xe^{x^2}(x^4 - 1 - x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

Задание 1. Найти производные функций

B1 $y = x^5 - 5x^2 + 11$, $y = x^2 \operatorname{ctg} x$

$$y' = 5x^4 - 10x, \quad y' = 2x \operatorname{ctg} x - x^2 \operatorname{ctg}^2 x$$

$$y' = 5x^4 - 10x, \quad y' = (x^2 \operatorname{ctg} x - x^2 \operatorname{ctg}^2 x)$$

B2 $y = 2x^3 - x^2 + 1$, $y = x^5 \operatorname{tg} x$

$$y' = 6x^2 - 2x, \quad y' = 5x^4 \operatorname{tg} x + x^5 \operatorname{tg}^2 x$$

$$y' = 6x^2 - 2x, \quad y' = (5x^4 \operatorname{tg} x + x^5 \operatorname{tg}^2 x)$$

B3 $y = 7x^3 + 3x^2 - 2$, $y = x \arctg x$

$$y' = 21x^2 + 6x, \quad y' = \arctg x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$y' = 21x^2 + 6x, \quad y' = \arctg x + \frac{x}{1+x^2}$$

B16 $y = x^5 - 5x^2 + 1$, $y = x^2 \operatorname{ctg} x$

$$y' = 5x^4 - 10x, \quad y' = 2x \operatorname{ctg} x - x^2 \operatorname{ctg}^2 x$$

$$y' = 5x^4 - 10x, \quad y' = (x^2 \operatorname{ctg} x - x^2 \operatorname{ctg}^2 x)$$

B17 $y = 2x^3 - x^2 + 17$, $y = x^5 \operatorname{tg} x$

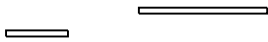
$$y' = 6x^2 - 2x, \quad y' = 5x^4 \operatorname{tg} x + x^5 \operatorname{tg}^2 x$$

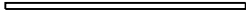
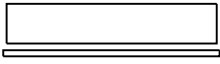
$$y' = 6x^2 - 2x, \quad y' = (5x^4 \operatorname{tg} x + x^5 \operatorname{tg}^2 x)$$

B18 $y = 7x^3 + 3x^2 - 2$, $y = x \arctg x$

$$y' = 21x^2 + 6x, \quad y' = \arctg x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$y' = 21x^2 + 6x, \quad y' = \arctg x + \frac{x}{1+x^2}$$





—

————— ————— —————

□ □

□

□

□

□

□

□

□

□

—————

—————

—————

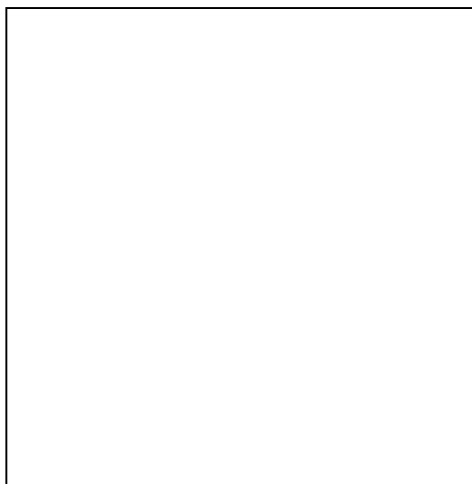
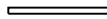
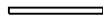
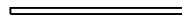
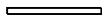
————— ————— ————— —————

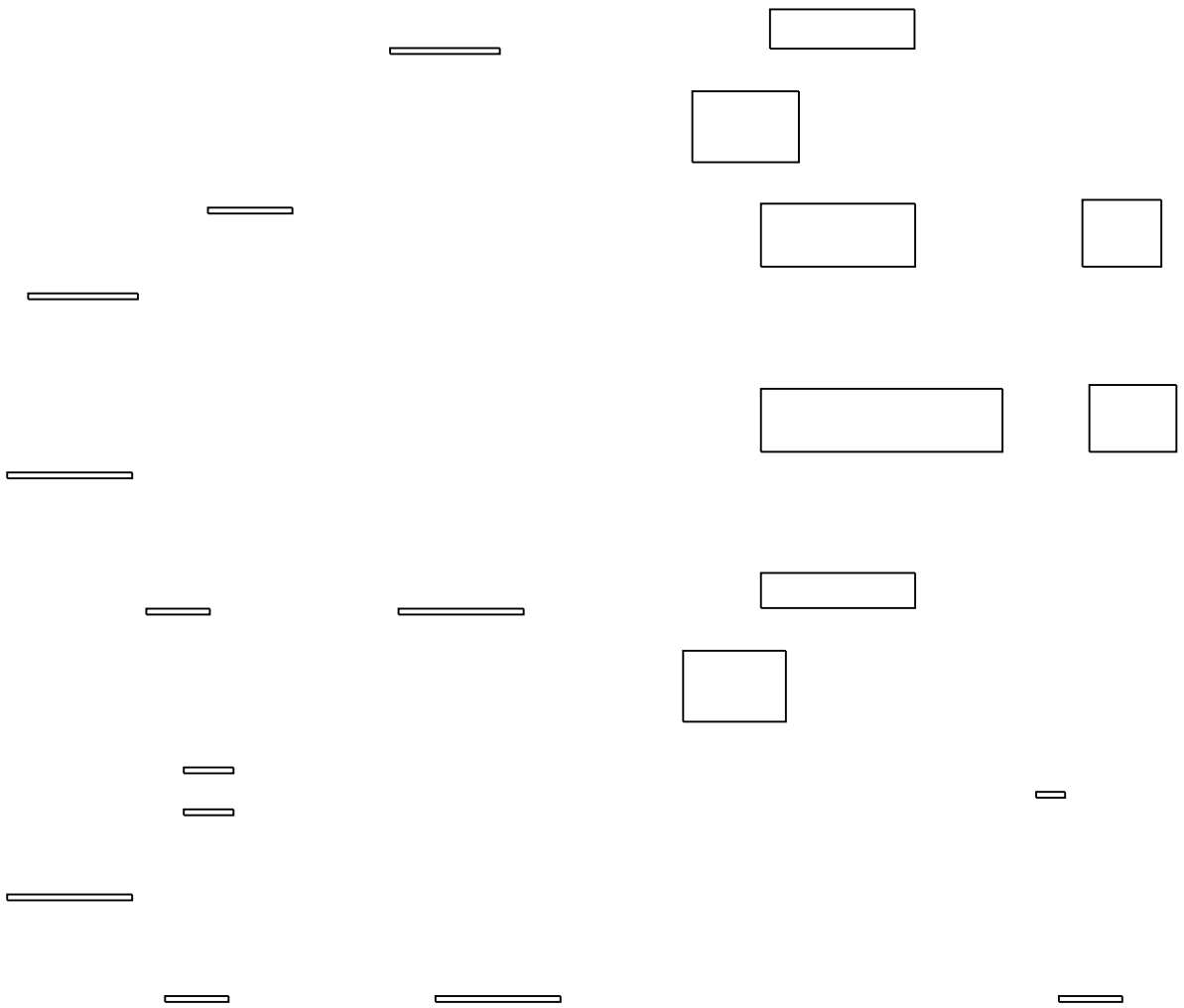
□

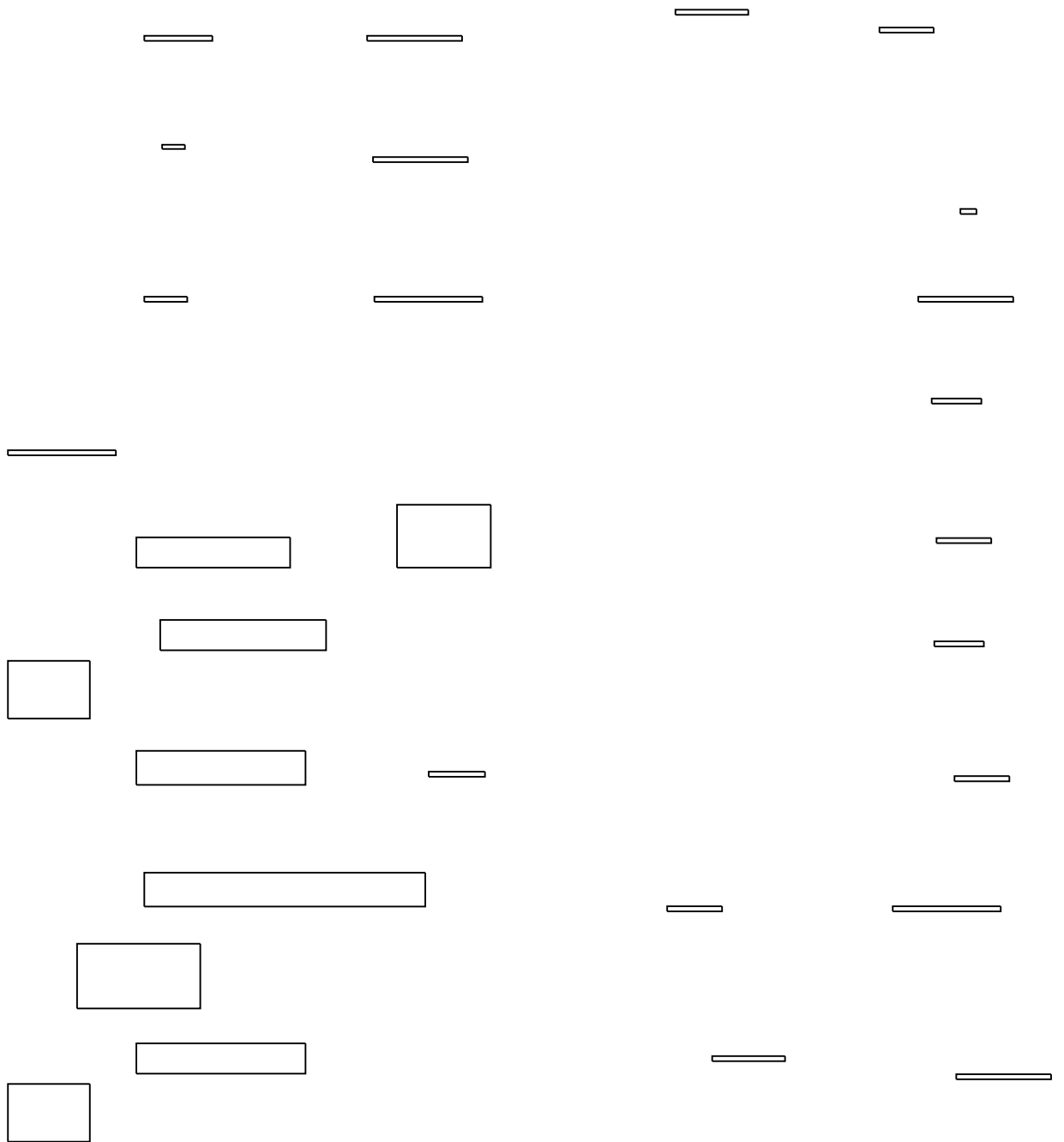
□

□

□







Тема «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса»

Цель: научиться вычислять определители второго и третьего порядка

Материальное обеспечение

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические сведения

Практическая работа № 8 по теме

Тема «Вычисление первообразной и определенных интегралов. Физическое и геометрическое приложение интегралов»

Цель: проверить умение вычисления определенных интегралов, нахождение площадей.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

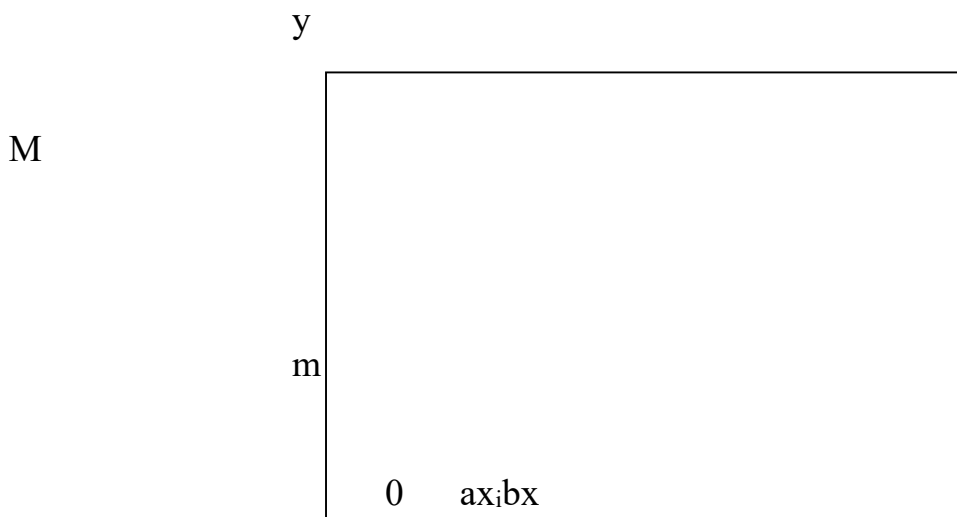
Домашнее задание

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Определенный интеграл.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$.



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a, b]$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, ..., $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$$[x_0, x_1] \subset [m, M]; [x_1, x_2] \subset [m, M]; \dots [x_{n-1}, x_n] \subset [m, M].$$

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Сумма \underline{S} называется **нижней интегральной суммой**, а сумма \overline{S} – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \leq M_i$, то $\underline{S}_n \leq \overline{S}_n$, а $m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \overline{S}_n \leq M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ξ_i

$$x_0 < \xi_1 < x_1, \quad x_1 < \xi_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$S_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$

$$\text{Следовательно, } \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$\underline{S_n} \leq S_n \leq \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции $f(x)$ ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $\max \Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $\min \Delta x_i$ – наименьший. Если $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, то число отрезков разбиения отрезка $[a, b]$ стремится к бесконечности.

Если $S_n \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, то $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = S$.

Определение: Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ и произвольном выборе точек ξ_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

стремится к пределу S , который называется определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначение: $\int_a^b f(x) dx$.

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

Определение: Если для функции $f(x)$ существует предел $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке $[a, b]$.

Также верны утверждения: $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

$$1) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx;$$

$$2) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$4) \text{ Если } f(x) \leq g(x) \text{ на отрезке } [a, b] \text{ } a < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

5) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

$$6) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x) dx$ нижний предел $a = \text{const}$, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)$. Найдем производную функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу x .

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x) dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$.

Тогда если

- 1) $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$
- 2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$
- 3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

Тогда $\int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] \Big|_a^b = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x^2) dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt; \\ \int_0^1 (1-x^2) dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right] = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция \sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \tan^2 x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan x \, dx}{1 + \tan^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная $\tan x$ имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке $x = \pi/2$). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

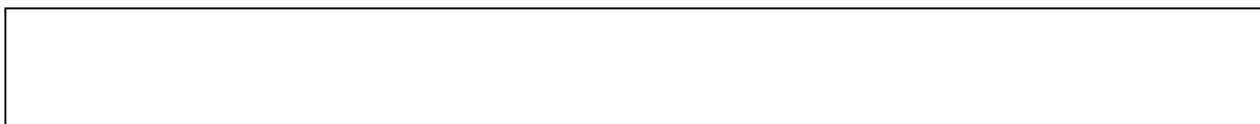
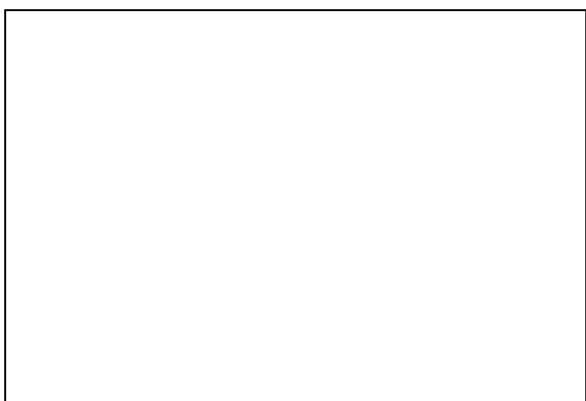
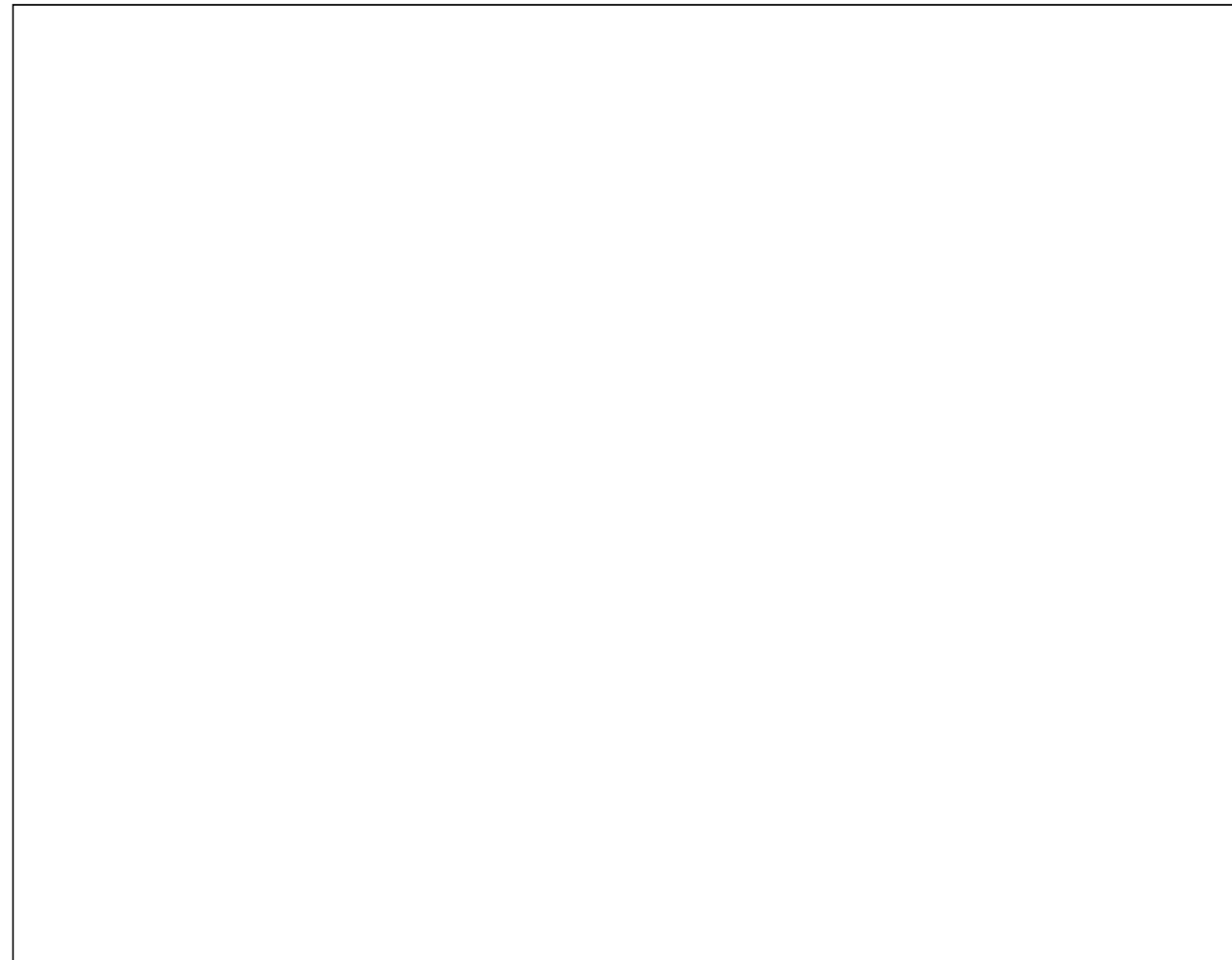
Интегрирование по частям.

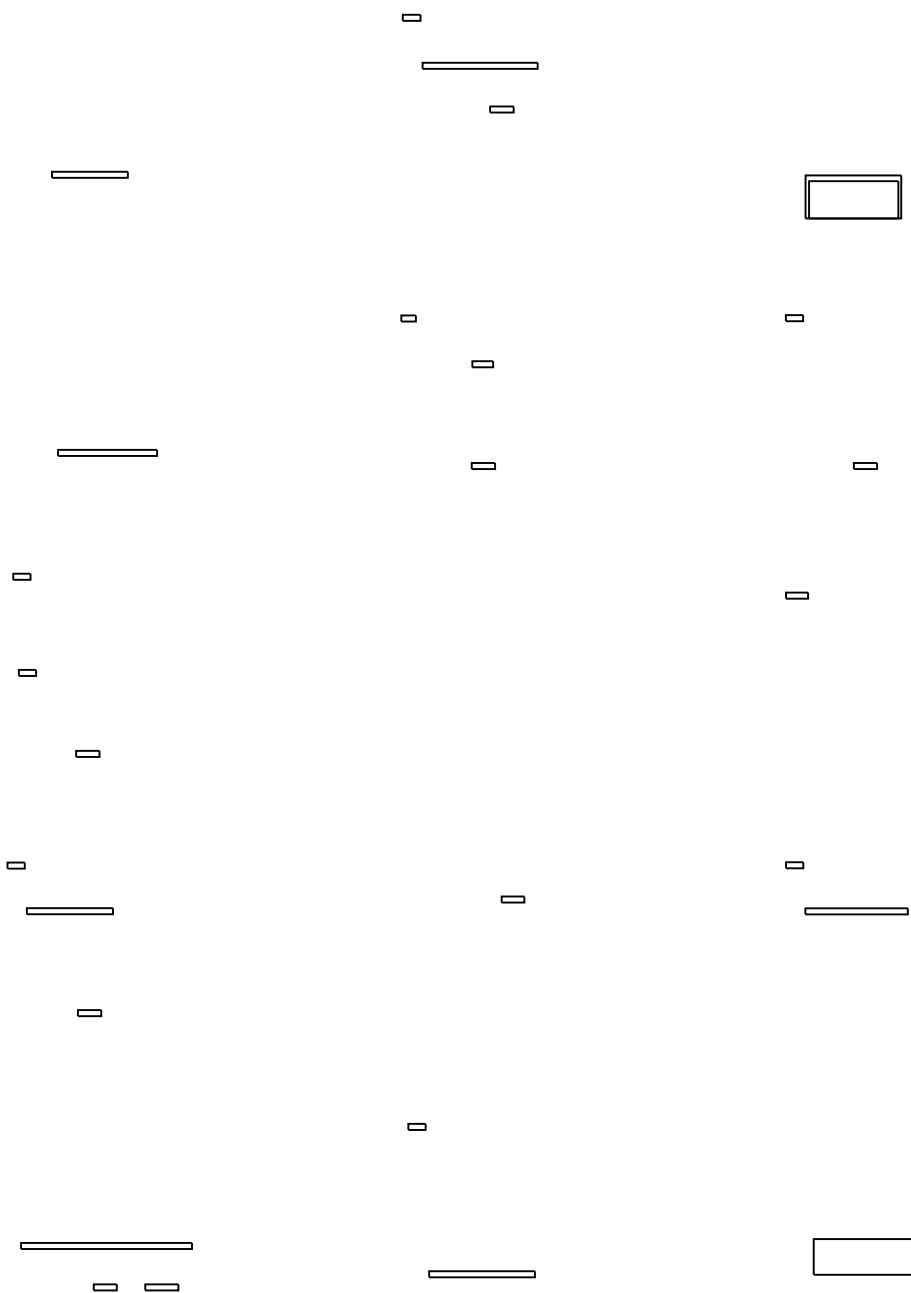
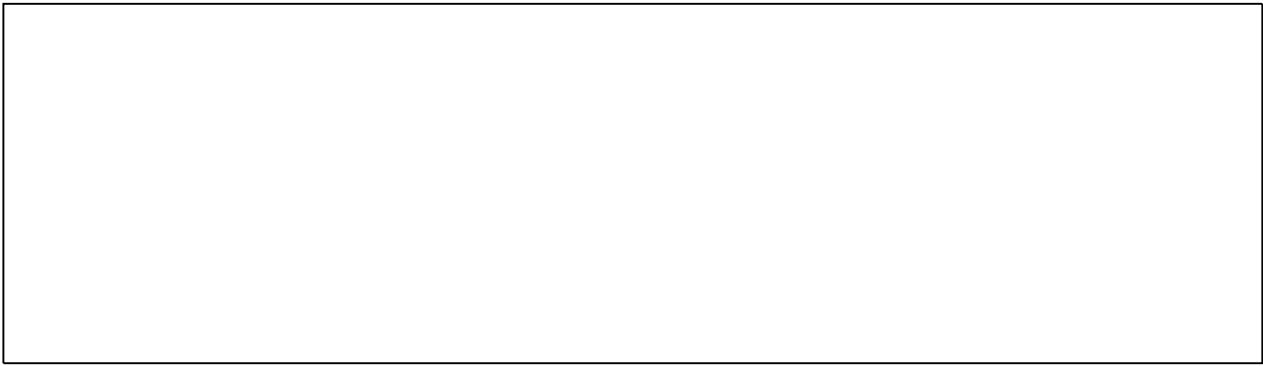
Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:





-

□

-

-

□

□

-

-

□

-

-

-

□

-

-

□

□

□

□

-

-

□

□

□

□

□

□

□

□

□

□

□

□

□

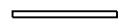
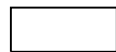
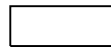
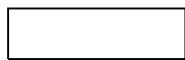
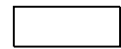
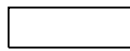
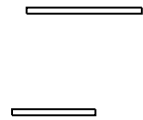
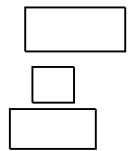
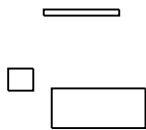
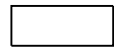
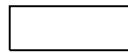
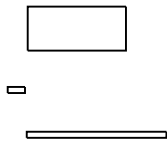
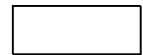
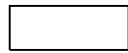
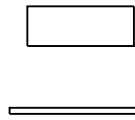
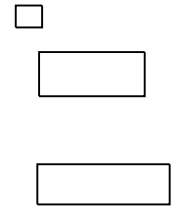
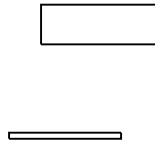
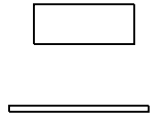
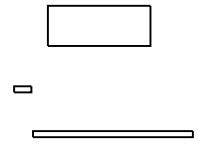
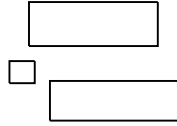
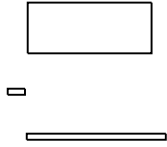
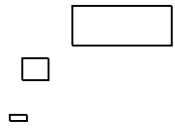
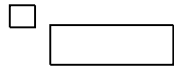
□

□

□

□

□



—



Контрольные вопросы

1. Что называют определенным интегралом функции $f(x)$?
2. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
3. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
5. Запишите свойства определенного интеграла.
6. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
7. Расскажите об основных методах интегрирования определенного интеграла.
8. Что такое криволинейная трапеция?
9. Формула Ньютона-Лейбница
10. Графики элементарных функций.
11. Различные виды плоских фигур и способы вычисления их площадей.

Практическая работа 9 по теме

«Нахождение частных производных. Полный дифференциал»

Цель: проверить умение находить и строить область определения сложной функции, находить частные производные.

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

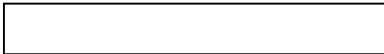
Домашнее задание

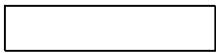
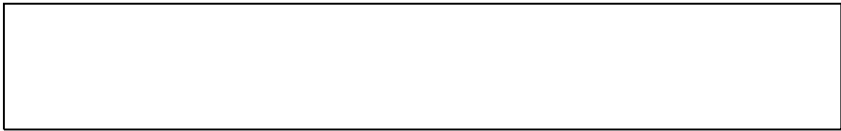
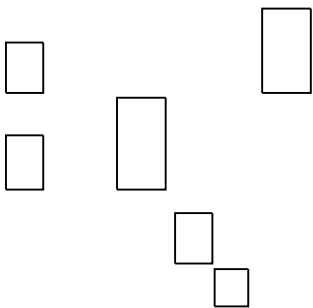
1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

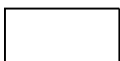
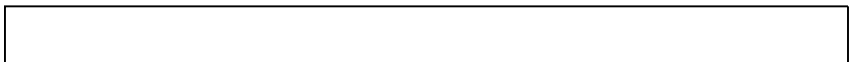
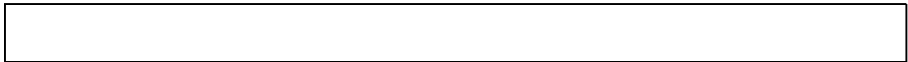
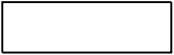
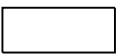
Теоретические сведения

Ход работы

Определение функции двух переменных







Таким образом, через смешанные производные второго порядка очень удобно проверить, а правильно ли мы нашли частные производные первого порядка.

Находим вторую производную по «икс».

Никаких изобретений, берем и дифференцируем её по «икс» еще раз:

Аналогично:

Следует отметить, что при нахождении , нужно проявить повышенное внимание, так как никаких чудесных равенств для их проверки не существует.

Примеры нахождения частных производных первого порядка.

Решение. Дифференцируем функцию $z = f(x, y)$ сначала по x , полагая y фиксированной величиной, потом повторяем эту же процедуру, меняя роли x и y . Получаем

Решение. Частные производные этой функции трех переменных выражаются следующими формулами:

Находим частные производные второго порядка. Их четыре.

Обозначения:

<input type="text"/>	или	<input type="text"/>	—	вторая	производная	по	«икс»
<input type="text"/>	или	<input type="text"/>	—	вторая	производная	по	«игрек»
<input type="text"/>	или	<input type="text"/>	—	смешанная	производная	«икс по игрек»	
<input type="text"/>	или	<input type="text"/>	—	смешанная	производная	«игрек по икс»	

В понятии второй производной нет ничего сложного. Говоря простым языком, **вторая производная – это производная от первой производной.**

Частные производные первого порядка:

Сначала найдем смешанные производные:

Как видите, всё просто: берем частную производную и дифференцируем ее еще раз, но в данном случае – уже по «игрек».

Аналогично:

В практических примерах можно ориентироваться на следующее равенство:

Таким образом, через смешанные производные второго порядка очень удобно проверить, а правильно ли мы нашли частные производные первого порядка.

Находим вторую производную по «икс».

Никаких изобретений, берем и дифференцируем её по «икс» еще раз:

Аналогично:

Следует отметить, что при нахождении , нужно проявить повышенное внимание, так как никаких чудесных равенств для их проверки не существует.

Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум

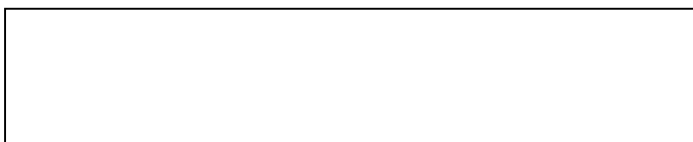
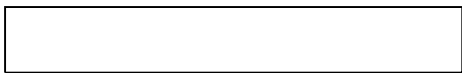
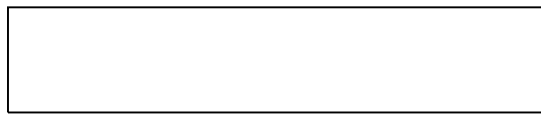
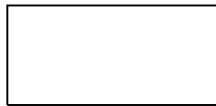
Функция $z = f(x, y)$ имеет **максимум** в точке $M_0(x_0; y_0)$, если $f(x_0; y_0) > f(x; y)$ для всех точек $(x; y)$, достаточно близких к точке $(x_0; y_0)$ и отличных от неё.

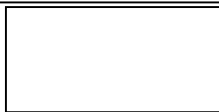
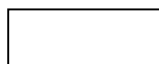
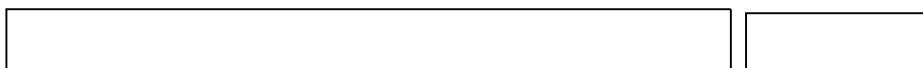
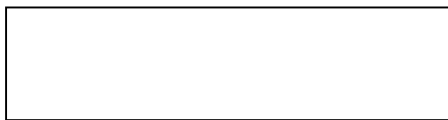
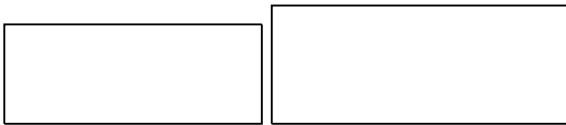
Функция $z = f(x, y)$ имеет **минимум** в точке $M_0(x_0; y_0)$, если $f(x_0; y_0) < f(x; y)$ для всех точек $(x; y)$, достаточно близких к точке $(x_0; y_0)$ и отличных от неё.

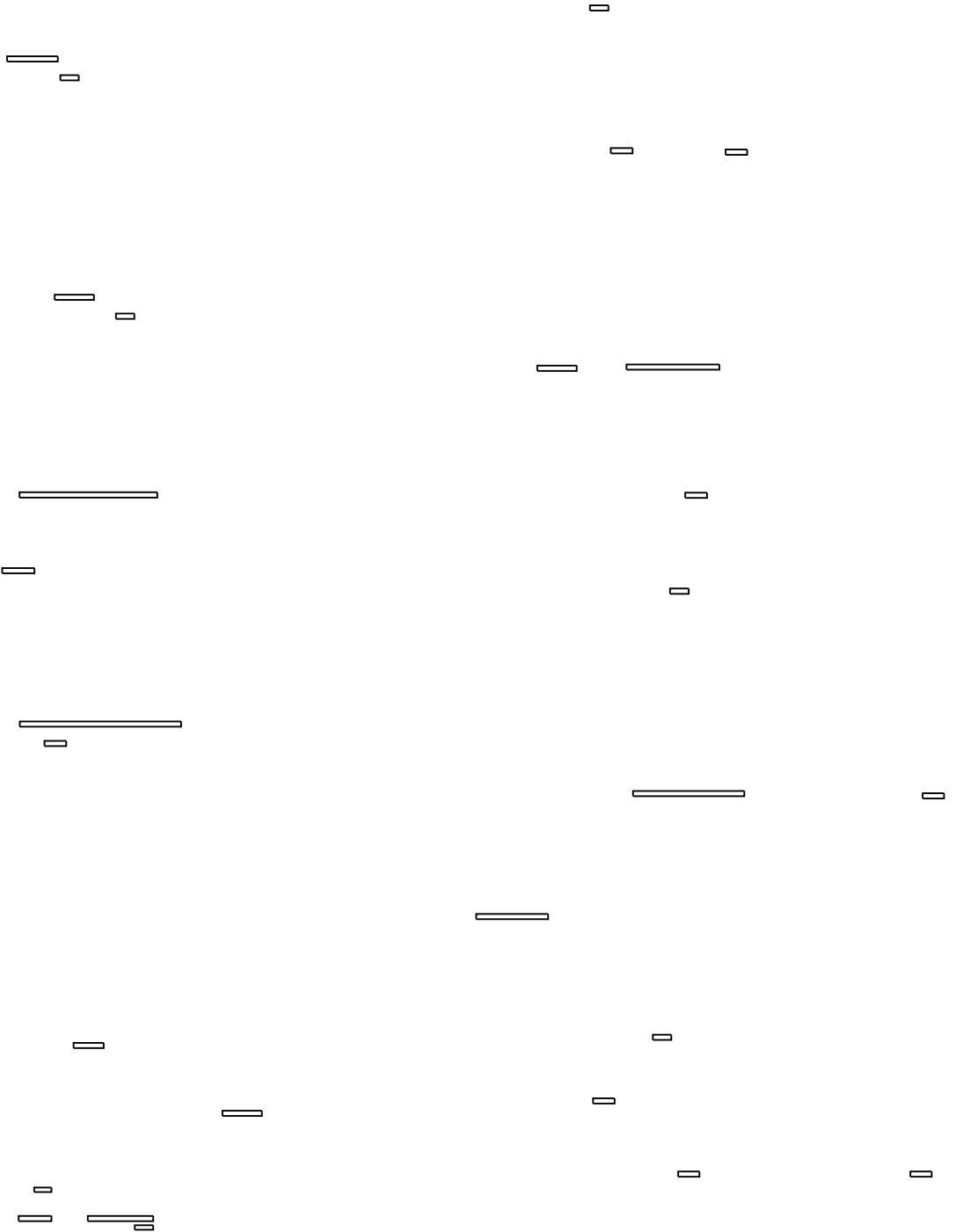
Максимум и минимум функции называются **экстремумами функции**.

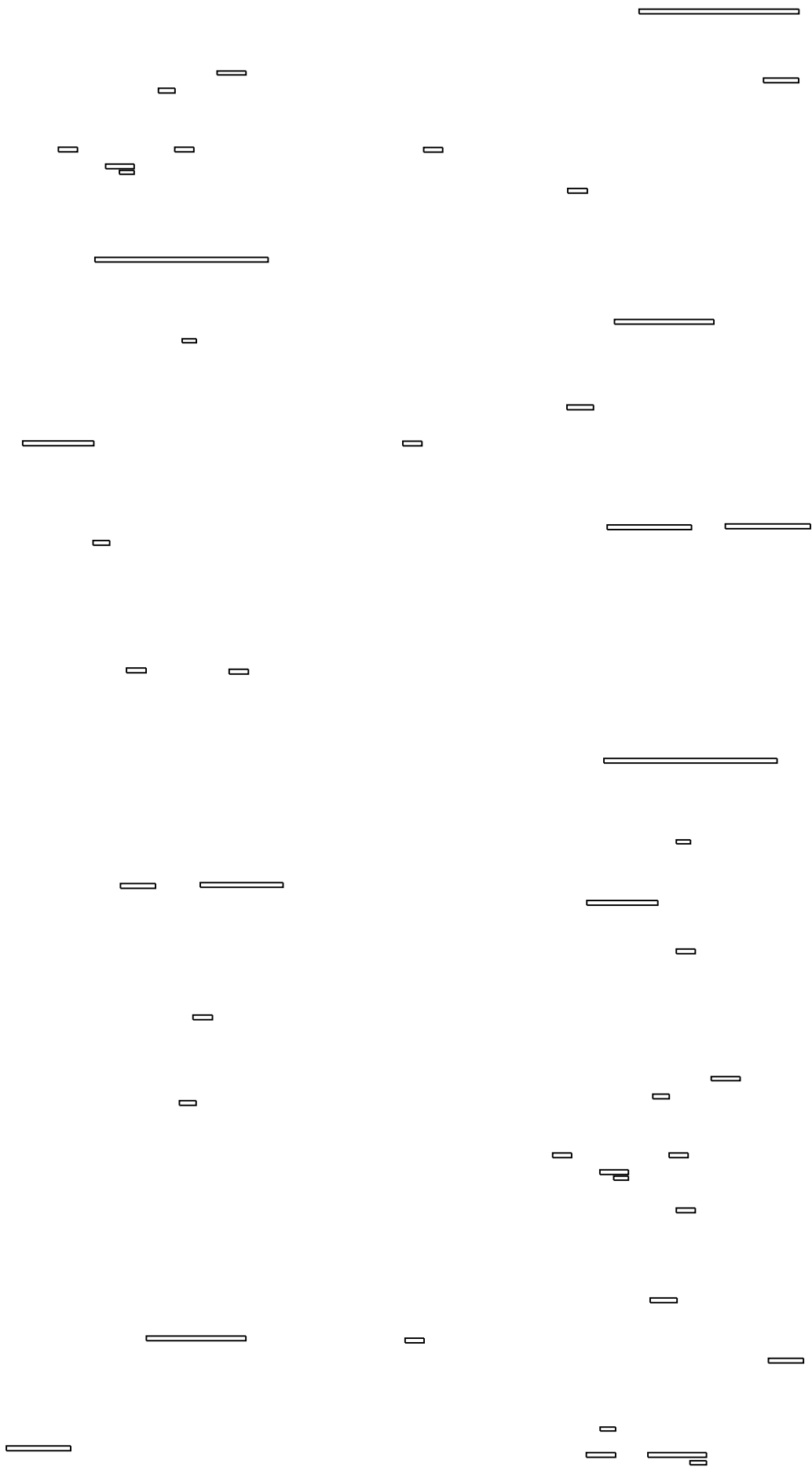
Исследование функции двух переменных на экстремум проводят по следующей схеме.

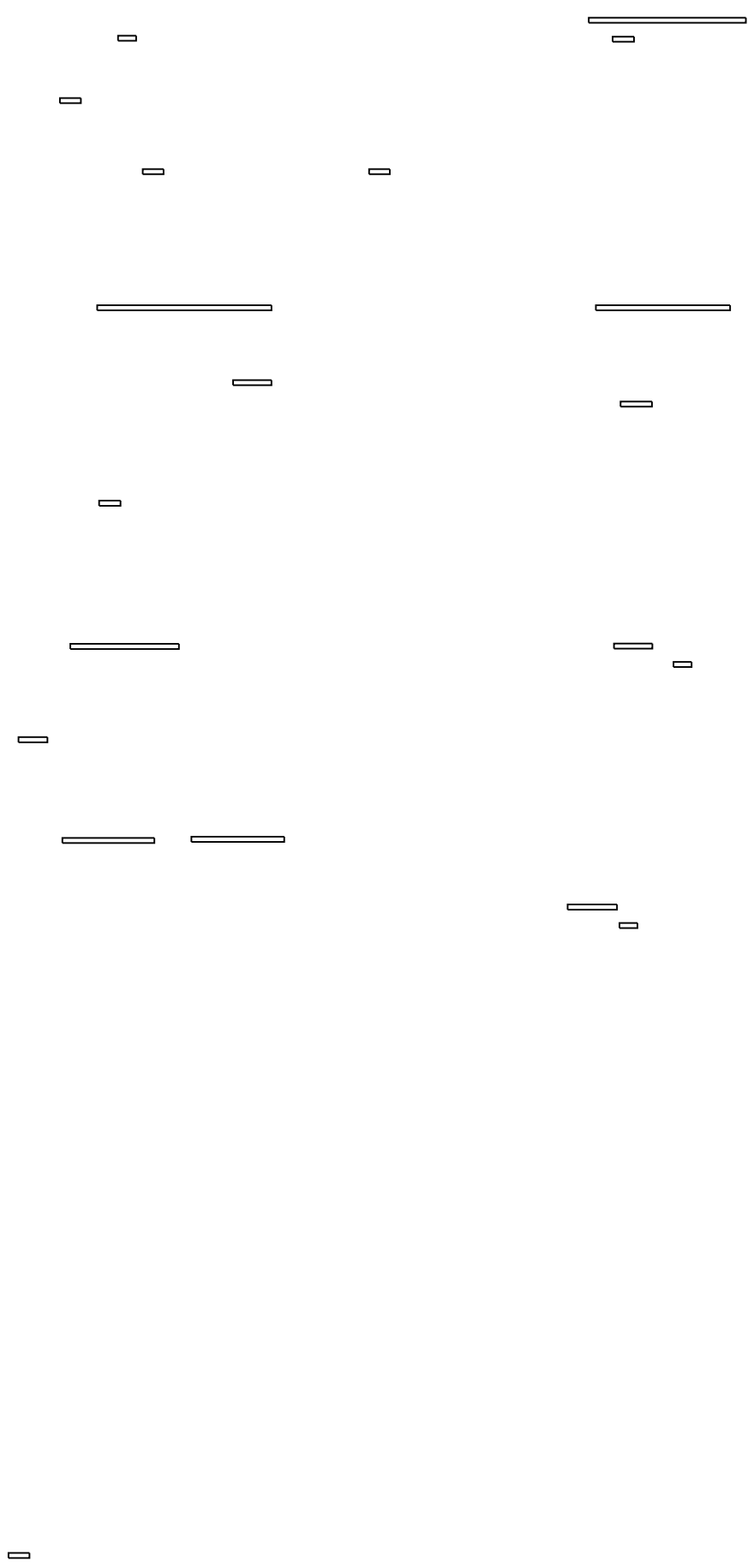
1. Находят частные производные dz/dx и dz/dy .
2. Решают систему уравнений:











□

B10. $z=1+xy^2$

B25. $z=y^2-xy-2$

B11. $z=4-2y^2+x^2$

B26. $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$

B12. $z=y^2+2xy-x^2-4y$

B27. $z=y^2-x^2+xy-2x-6y$

B13. $z=x^2-xy$

B28. $z=x^2+y^2+xy-3x-6y$

B14. $z=xy(4-x-y)$

B29. $z=x^3-y^3-3xy$

B15. $z=x^2+2xy-y^2-4x$

B30. $z=x^3+y^3-15xy$

Контрольные вопросы:

- 1.Сформулировать определение функции с двумя переменными.
- 2.Что называется областью определения функции нескольких переменных?
- 3.Сформулировать правило нахождения производной функции нескольких переменных.
- 4.Что такое полный дифференциал функции нескольких переменных?
- 5.Сформулировать алгоритм нахождения экстремума функции нескольких переменных

Практическая работа № 10 по теме**Тема «Вычисление двойных интегралов»**

Цель: проверить умение вычислять двойные интегралы в декартовых координатах

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

- 1.Теоретические сведения
- 2.Задание
- 3.Лист А 4
- 4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

- 1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
- 4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретический материал

Пусть в некоторой ограниченной замкнутой области D плоскости xOy задана непрерывная функция $z = f(P)$, где точка $P \in D$. Разобьем эту область произвольным образом на n частичных плоских ячеек S_1, S_2, \dots, S_n , имеющие площади $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. В каждой такой ячейке выберем по одной произвольной точке P_1, P_2, \dots, P_n и вычислим значения функции $f(P)$ во взятых точках. Составим так называемую *интегральную сумму* функции $f(P)$ по области D :

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i = f(P_1) \Delta S_1 + f(P_2) \Delta S_2 + \dots + f(P_n) \Delta S_n. \quad (1)$$

Двойным интегралом от функции $f(P)$ по области D называется предел интегральной суммы (1) при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех ячеек данного разбиения:

$$\iint_D f(P) dS = \lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i \quad (2)$$

Основные свойства двойного интеграла

1. Двойной интеграл по области D от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от слагаемых функций по этой же области:

$$\iint_D f_1(P) \pm f_2(P) dS = \iint_D f_1(P) dS \pm \iint_D f_2(P) dS.$$

2. Постоянный множитель k можно вынести за знак двойного интеграла:

$$\iint_D k f(P) dS = k \iint_D f(P) dS.$$

3. Область интегрирования двойного интеграла можно разбить на части, то есть если область D состоит из двух непересекающихся областей D_1 и D_2 , то

$$\iint_D f(P) dS = \iint_{D_1} f(P) dS + \iint_{D_2} f(P) dS.$$

Примеры

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

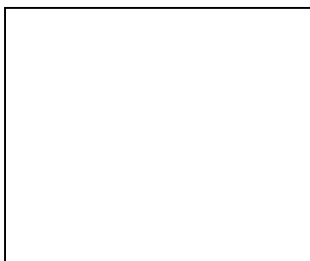
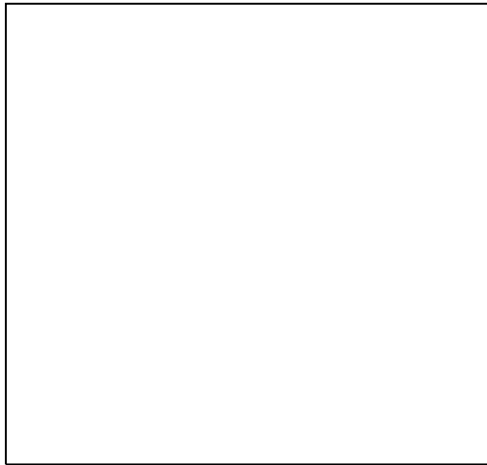
—

—

—

—

—



Примеры

Задание: Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2x + 1$, $x = 0$, $y = 4$, $y = x^2$.

Решение: Тело, ограниченное заданными поверхностями, представляет собой вертикальный параболический цилиндр, расположенный в первом октанте. Сверху тело ограничено плоскостью $z = 2x + 1$, сбоку параболическим цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $x = 0$ и $y = 4$. Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 4$: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$. Таким образом, получим одну точку пересечения $M(2; 4)$.

Значение $x = -2$ не рассматриваем, так как цилиндр расположен в первом октанте. Область D запишем в виде системы неравенств $0 \leq x \leq 2$ и $x^2 \leq y \leq 4$. Согласно формуле (3), получим

$$V = \int_D z dx dy = \int_0^2 \int_{x^2}^4 (2x + 1) dy dx = \int_0^2 (2xy + y) \Big|_{x^2}^4 dx = \int_0^2 (8x + 4 - 2x^3 - x^2) dx = 13 \frac{1}{3} \text{ (куб. ед.)}$$

Задание 1. Вычислить интеграл по области D , ограниченной указанными линиями.

B 1 $\int_D x^2 y^2 \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$

Гр: $y = 0$, $y = \sqrt{1 - x^2}$
 $\sqrt{1 - x^2} = x/2$
B 2 $\int_D (3x^2 y^2 + \frac{y^3}{2}) dx dy$

B 16 $\int_D x^2 y^2 \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$

Гр: $y = 0$, $y = \sqrt{1 - x^2}$
 $y = x/2$
B 17 $\int_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy$

Гр: $y = 1$, $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$
 $y = x^3$

□

□

□

□

□

□

□

□

□

□

□

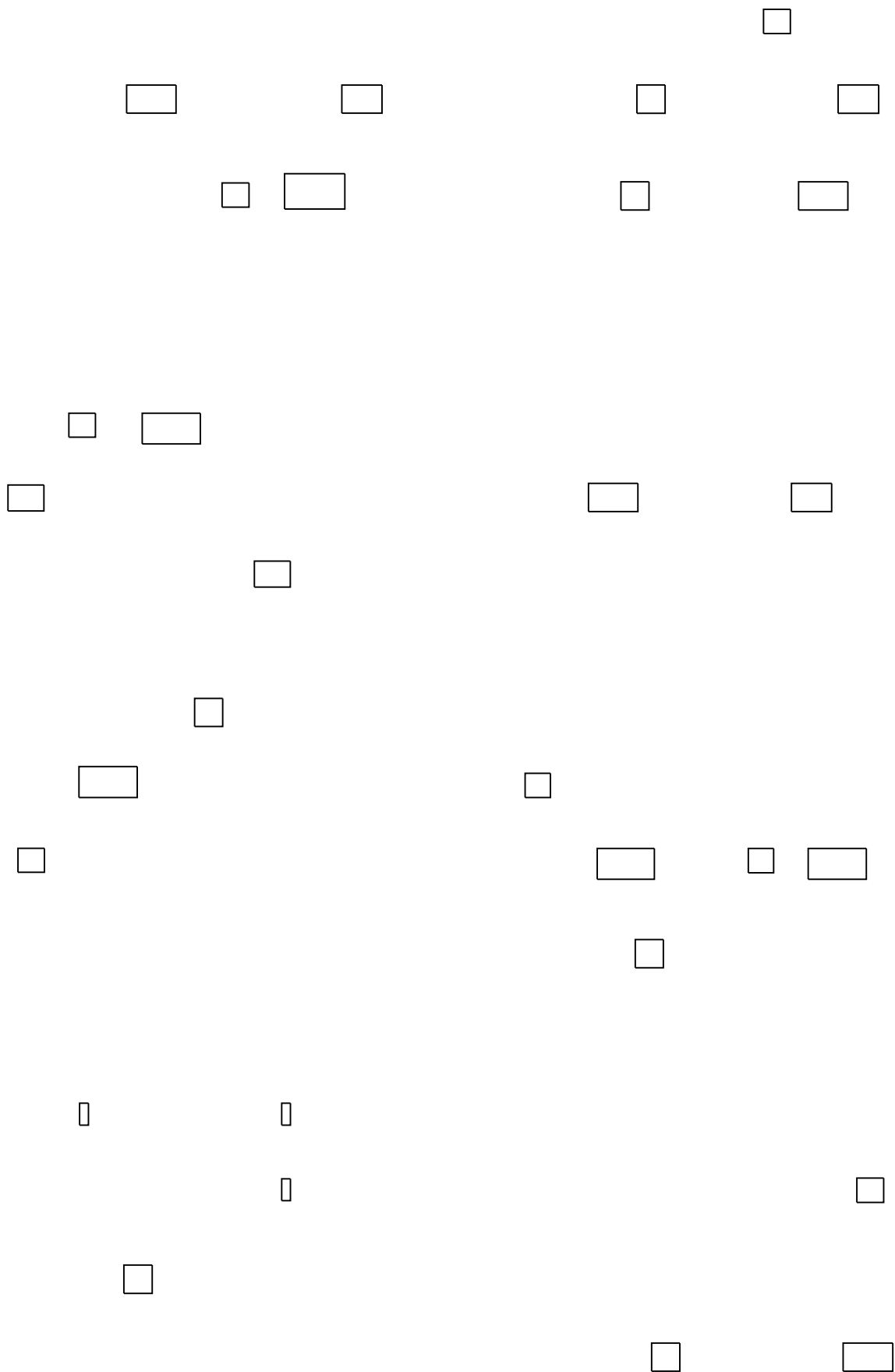
□

□

□

□

□









1. 1

1. 1

1. 1

1. 1

1. 1

1. 1

1. 1

1. 1

1. 1

1. 1

1. 1

1. 1

1. 1

1. 1

1. 1

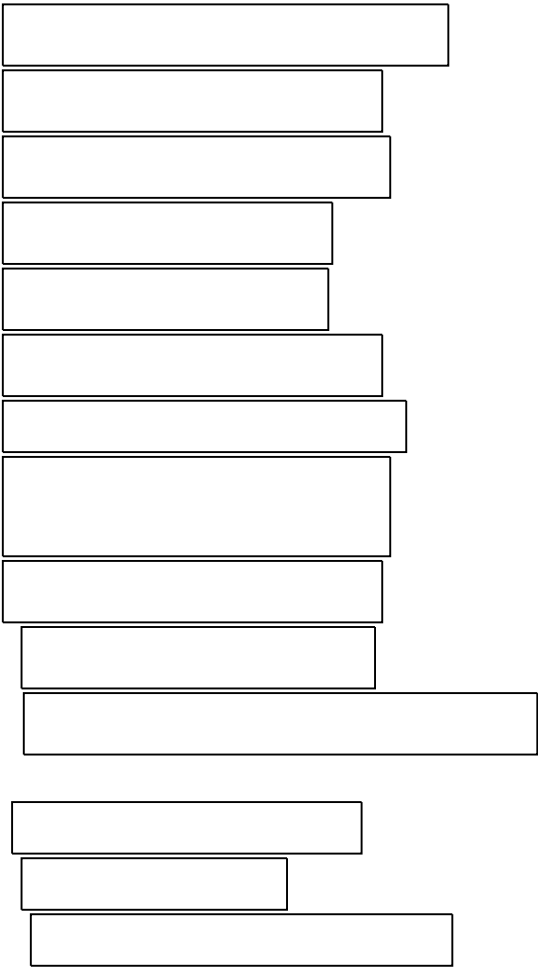
1. 1

1. 1

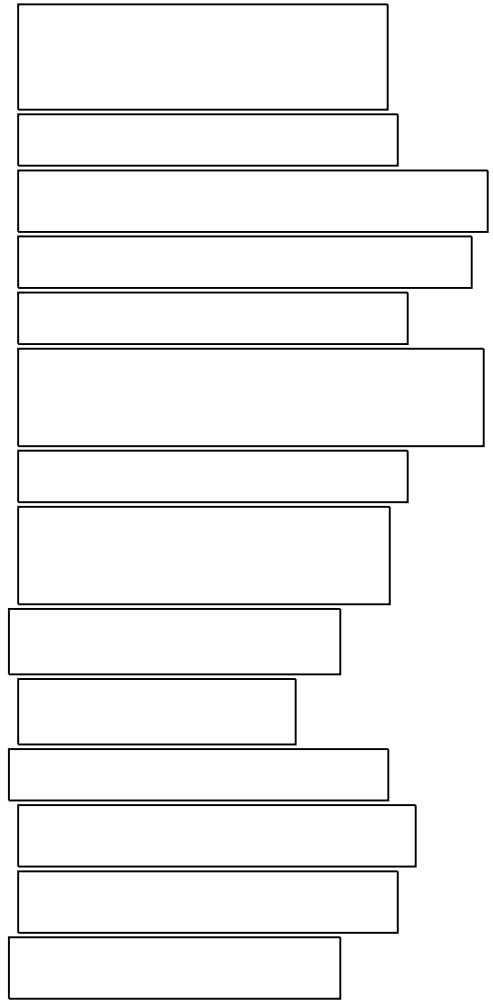
1. 1

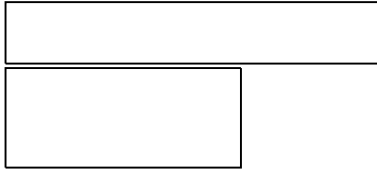
1. 1

1



1





Порядок выполнения работы

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

Теоретические сведения

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа u_1, u_2, \dots будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $n = 1, 2, \dots$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частных сумм ряда $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Свойства рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и \sum

Cu_n , где C – постоянное число.

Теорема. Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S , то ряд $\sum C u_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS . ($C \neq 0$)

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. Суммой или разностью этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

Теорема. Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ , то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S \pm \sigma$.

$$\sum (u_n \pm v_n) = \sum u_n \pm \sum v_n = S \pm \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.
Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.
О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

1) Если ряд $\sum u_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член u_n стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{3n+1} + \dots$

Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$ - необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако, этот признак также не является достаточным.

Например, ряд $1-1+1-1+1-1+ \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при четных } n \\ 1, & \text{при нечетных } n \end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $\|S_n\| \leq 2$ при любом n .

Ряды с неотрицательными членами.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на -1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема. Для сходимости ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n , то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} + \dots$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} \leq \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости

Теорема. Если $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.

Признак Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число $q < 1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$, то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n

выполняется условие $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится. Если $\rho = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Признак Коши. (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами существует такое число $q < 1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \leq q$,

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Следствие. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ ряд расходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 1}{3^n + 5}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3^n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n^2}}{3 \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} \neq 0$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Если $\varphi(x)$ – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке $[1; \infty)$, то ряд $\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \varphi(x) dx$ одинаковы в смысле сходимости.

Пример. Ряд $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$ т.к.

соответствующий несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ называется **обобщенным гармоническим** рядом.

Следствие. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции на интервале $(a, b]$ и

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = h, \quad h \neq 0, \text{ то интегралы } \int_a^b f(x) dx \text{ и } \int_a^b \varphi(x) dx \text{ ведут себя одинаково в}$$

смысле сходимости.

Знакопеременные ряды. (Знакочередующиеся ряды).

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm u_4 \pm \dots \pm (\pm 1)^n u_n \pm \dots$$

где $u_n \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots$

Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда $u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm u_4 \pm \dots \pm (\pm 1)^n u_n \pm \dots$ абсолютные величины u_i убывают $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$ и общий член стремится к нулю $u_n \rightarrow 0$, то ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков)

$$u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_n \pm \dots \pm \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| \pm |u_2| \pm \dots \pm |u_n| \pm \dots \pm \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \quad (2)$$

Теорема. Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится. **Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.**

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд. **Признак Даламбера.** Если существует

предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся. При $\rho = 1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся. При $\rho = 1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** Для абсолютной сходимости ряда $\sum u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ , то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i, k = 1, 2, \dots$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S\sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Задания практической работы

1. Выписать три первых члена ряда найти третью частичную сумму

1, 11, 21 а) \square ;

б) \square .

2, 12, 22 а) \square ;

б) \square .

--

--

--

--

--

--

--

--

--

--

--

--

--

--

--

--

--

--

--

--

--

—

—

—

—

—

—

—

—

—

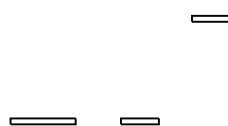
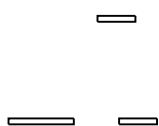
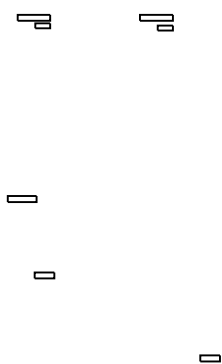
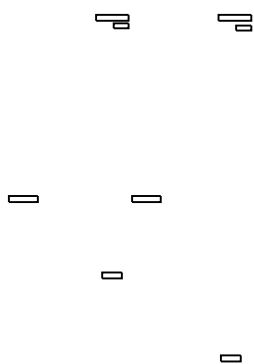
—

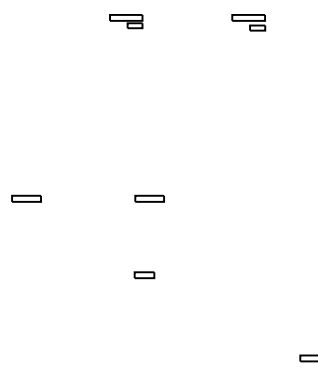
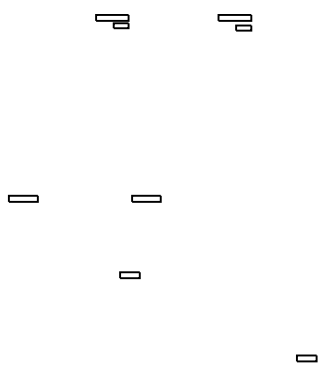
—

—

—

—





1 1

1 1

1 1

1 1

1

1

1

1

2.Задание

3.Лист А 4

4.Калькуляторы

Порядок выполнения работы

- 1.Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
- 4.Показать результаты преподавателю

Домашнее задание

- 1.Подготовить ответы на контрольные вопросы

Ход работы

Теоретические сведения

Определение. Матрицей размера $m \times n$, где m - число строк, n - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij} , где i - номер строки, а j - номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m=n$), то матрица называется **квадратной**.

Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется

симметрической. Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая

матрица **Определение.** Квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется

диагональной матрицей.

Действия с матрицами Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$C = A + B = B + A.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, найти

$$2A + B.$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Произведением матриц $AB = C$; называется матрица, элементы которой

могут быть вычислены по следующим формулам: $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ Из

приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.** **Определение.** Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A , а переход от A к B **транспонированием**,

если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$.

Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 20 & 10 \\ 8 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 20 & 10 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 24 & 12 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 16 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

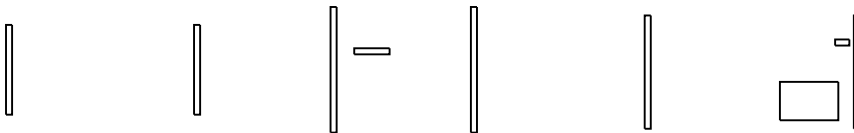
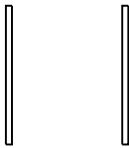
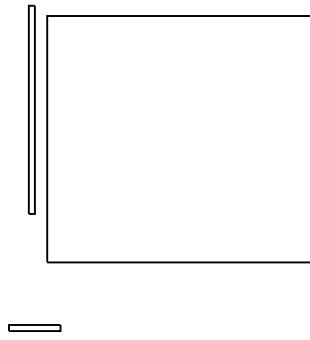
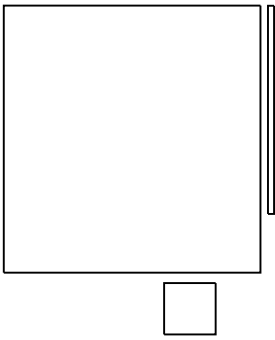
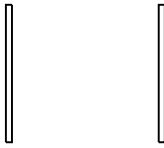
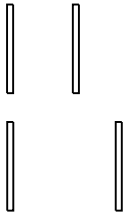
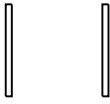
Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

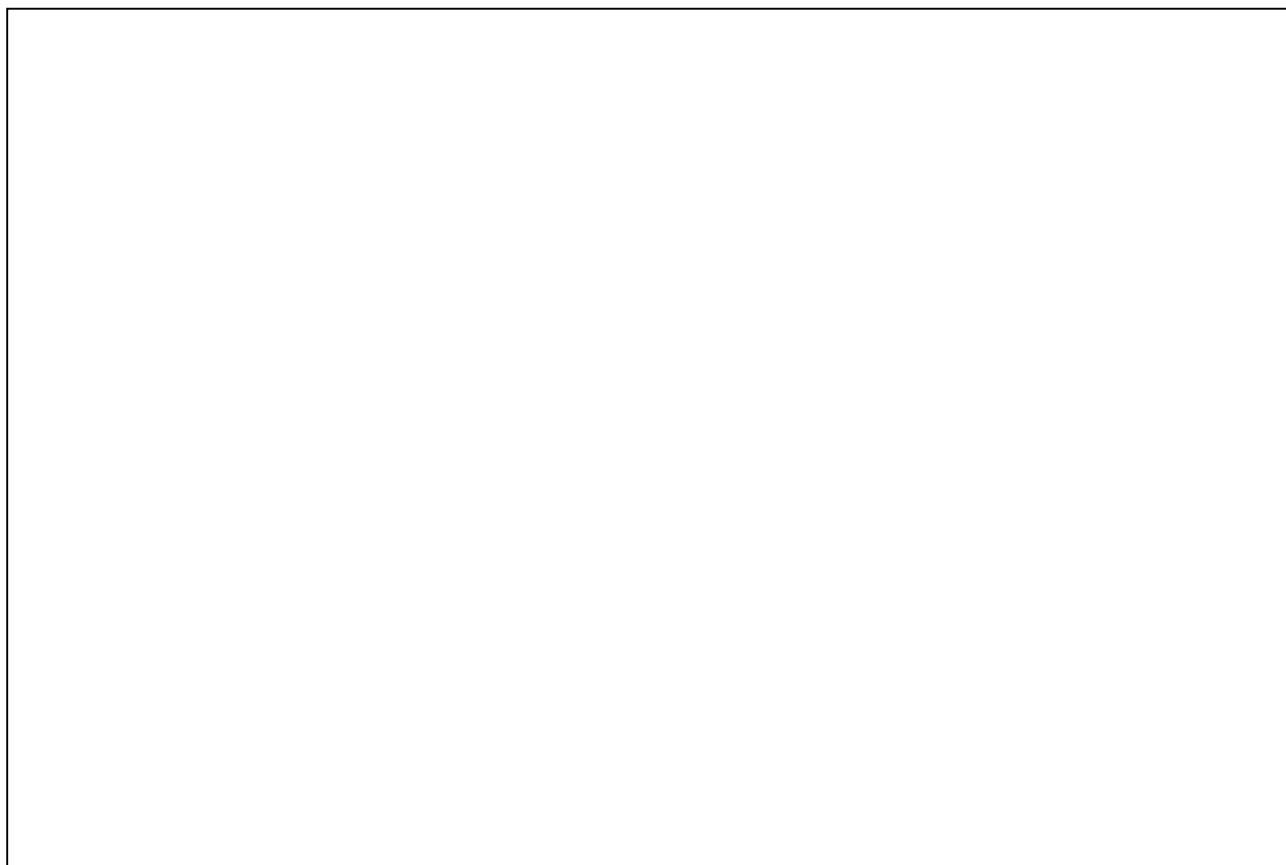
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}$$

Определителем второго порядка называется число, которое поставлено в

соответствие таблицы коэффициентов $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

по следующему правилу: произведение по главной диагонали берется со знаком плюс, по другой диагонали со знаком минус.





—

—

—

—

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i / \Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца I столбцом свободных членов b ;

Суть **метода Гаусса** заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1-го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \dots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \dots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3}x_3 + \dots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \text{ где } d_{ij} = a_{ij} / a_{11}, j = 2, 3, \dots, n+1.$$

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1} d_{1j} \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad j = 2, 3, \dots, n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

К элементарным преобразованиям относятся:

- 1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.
- 2) Перестановка уравнений местами.
- 3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x .

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $n - 1$ -го порядка, полученный из исходного путём вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij} .

$$\text{Так если } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то } \Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

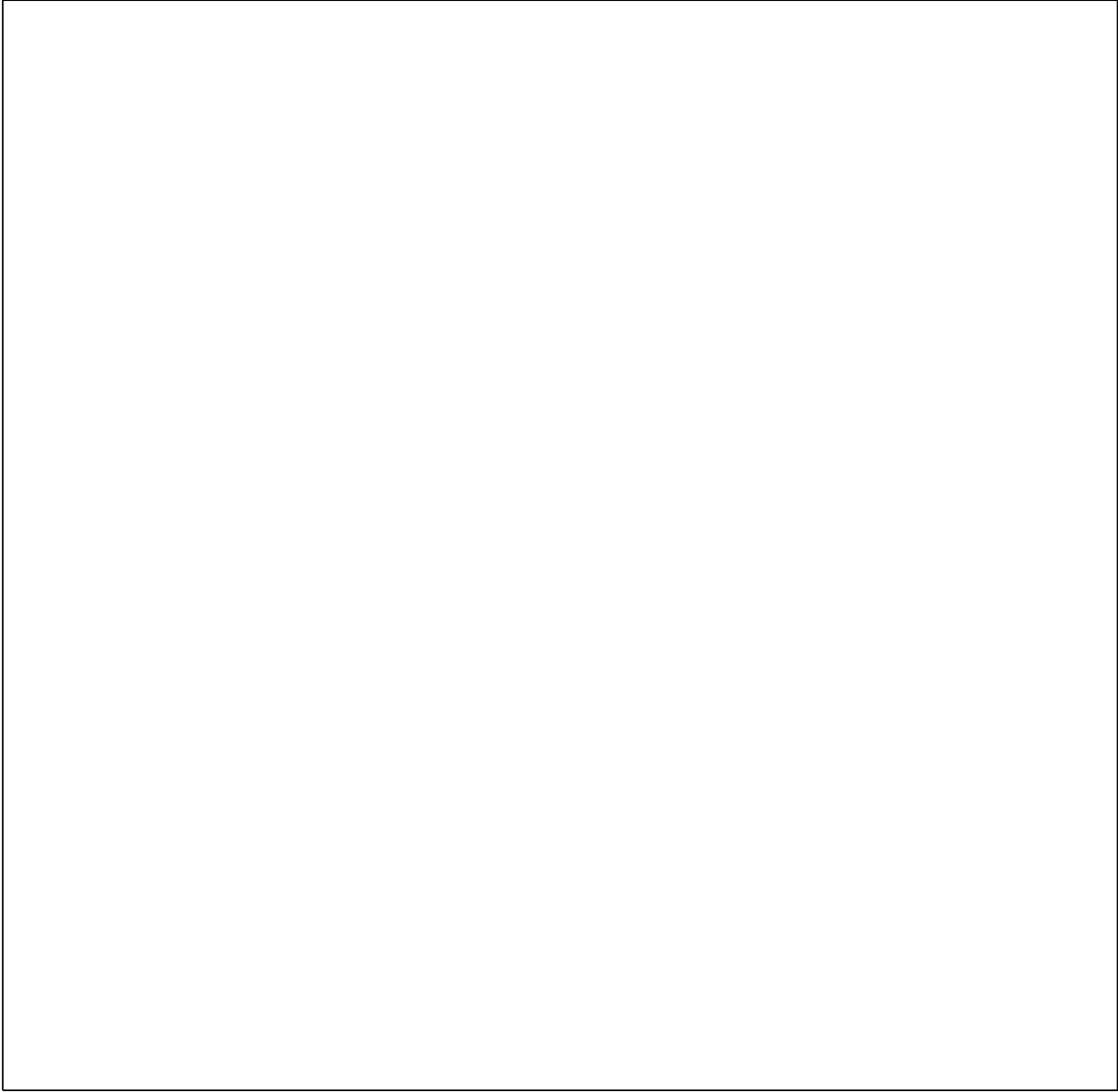
Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i + j$ – чётное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечётная. Обозначается A_{ij} : $A_{ij} = (-1)^{i+j} * m_{ij}$.

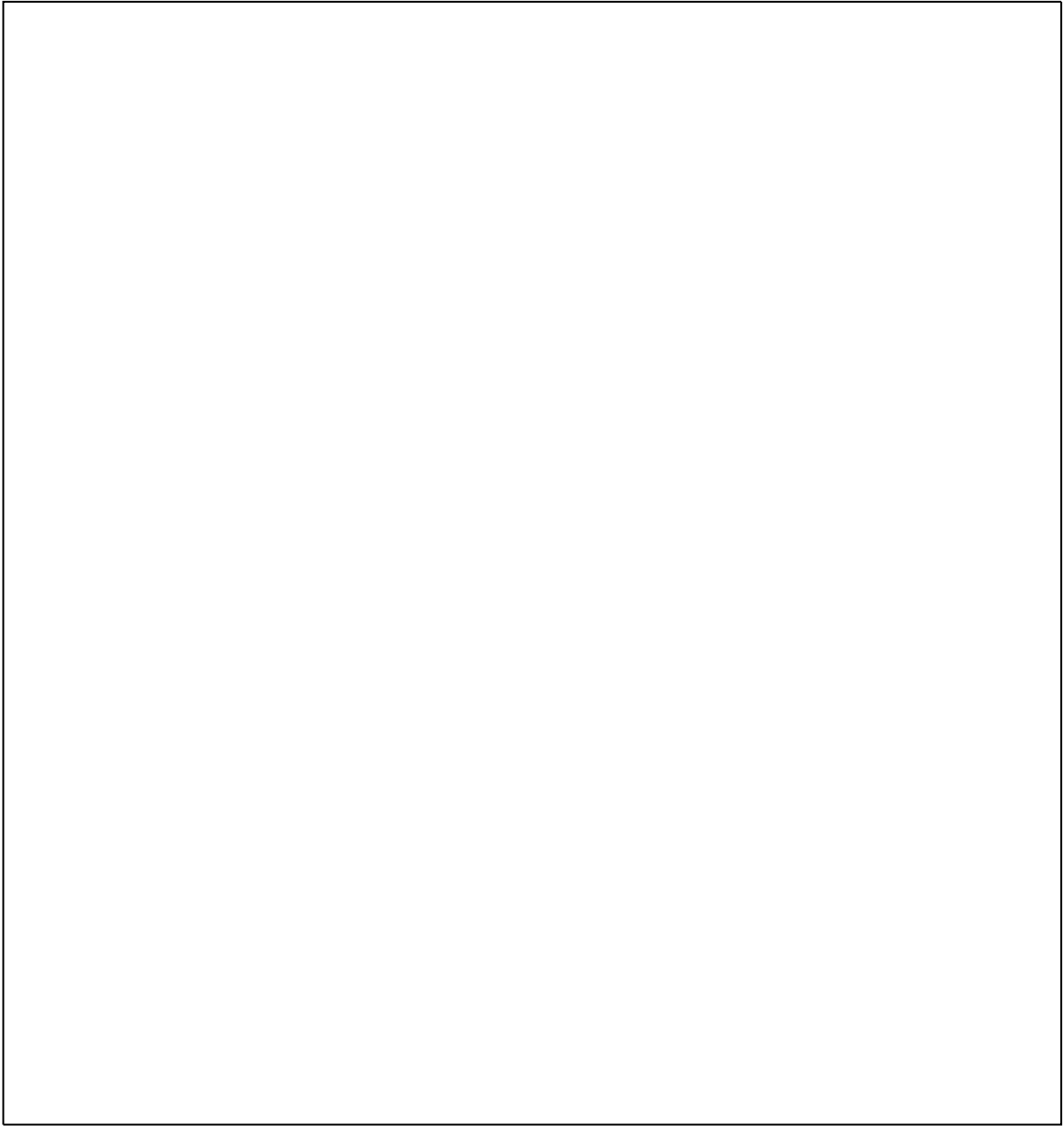
Пусть A – квадратная матрица n -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

□







$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x & 4y & z \\ 5y & 4z & 20 \\ 3x & 2y & 5z \end{vmatrix} = 6, \\ 1.10. & \begin{vmatrix} x & 4y & z \\ 5y & 4z & 20 \\ 3x & 2y & 5z \end{vmatrix} = 22. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3x & 2y & 4z \\ 3x & 4y & 2z \\ 2x & y & z \end{vmatrix} = 21, \\ 1.11. & \begin{vmatrix} 3x & 4y & 2z \\ 2x & y & z \end{vmatrix} = 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3x & 2y & 5z \\ 2x & 3y & 4z \\ x & 2y & 3z \end{vmatrix} = 5, \\ 1.12. & \begin{vmatrix} 2x & 3y & 4z \\ x & 2y & 3z \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 4x & y & 4z \\ 2x & y & 2z \\ x & y & 2z \end{vmatrix} = 19, \\ 1.13. & \begin{vmatrix} 2x & y & 2z \\ x & y & 2z \end{vmatrix} = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2x & y & 2z \\ 4x & y & 4z \\ x & y & 2z \end{vmatrix} = 0, \\ 1.14. & \begin{vmatrix} 4x & y & 4z \\ x & y & 2z \end{vmatrix} = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2x & y & 2z \\ x & y & 2z \\ 4x & y & 4z \end{vmatrix} = 8, \\ 1.15. & \begin{vmatrix} x & y & 2z \\ 4x & y & 4z \end{vmatrix} = 22. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2x & y & 3z \\ x & 5y & z \\ 3x & 4y & 2z \end{vmatrix} = 9, \\ 1.16. & \begin{vmatrix} x & 5y & z \\ 3x & 4y & 2z \end{vmatrix} = 15. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2x & y & 3z \\ 3x & 4y & 2z \\ x & 5y & z \end{vmatrix} = 0, \\ 1.17. & \begin{vmatrix} 3x & 4y & 2z \\ x & 5y & z \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3x & 5y & 6z \\ 3x & y & z \\ x & 4y & 2z \end{vmatrix} = 8, \\ 1.18. & \begin{vmatrix} 3x & y & z \\ x & 4y & 2z \end{vmatrix} = 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 3x & 5y & 6z \\ x & 4y & 2z \end{vmatrix} = 4, \\ 1.19. & \begin{vmatrix} 3x & 5y & 6z \\ x & 4y & 2z \end{vmatrix} = 36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 5x & y & 2z \\ x & 2y & 4z \end{vmatrix} = 11, \\ 1.20. & \begin{vmatrix} 5x & y & 2z \\ x & 2y & 4z \end{vmatrix} = 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 5x & y & 2z \\ x & 2y & 4z \end{vmatrix} = 9, \\ 1.21. & \begin{vmatrix} 5x & y & 2z \\ x & 2y & 4z \end{vmatrix} = 11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2x & 3y & z \\ 2x & y & 3z \\ 3x & 2y & z \end{vmatrix} = 4, \\ 1.22. & \begin{vmatrix} 2x & y & 3z \\ 3x & 2y & z \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2x & 3y & z \\ 2x & y & 3z \\ 3x & 2y & z \end{vmatrix} = 12, \\ 1.23. & \begin{vmatrix} 2x & y & 3z \\ 3x & 2y & z \end{vmatrix} = 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x & 2y & 3z \\ 2x & 3y & 4z \\ 3x & 2y & 5z \end{vmatrix} = 14, \\ 1.24. & \begin{vmatrix} 2x & 3y & 4z \\ 3x & 2y & 5z \end{vmatrix} = 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3x & 4y & 2z \\ 2x & y & z \\ 3x & 2y & 4z \end{vmatrix} = 11, \\ 1.25. & \begin{vmatrix} 2x & y & z \\ 3x & 2y & 4z \end{vmatrix} = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x & 5y & 6z \\ 3x & y & 4z \\ 2x & 3y & z \end{vmatrix} = 15, \\ 1.26. & \begin{vmatrix} 3x & y & 4z \\ 2x & 3y & z \end{vmatrix} = 13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 4x & y & 6z \\ 3x & 2y & 5z \\ x & 3y & 4z \end{vmatrix} = 6, \\ 1.27. & \begin{vmatrix} 3x & 2y & 5z \\ x & 3y & 4z \end{vmatrix} = 14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 5x & 2y & 4z \\ x & 3z & 6 \\ 2x & 3y & z \end{vmatrix} = 16, \\ 1.28. & \begin{vmatrix} x & 3z & 6 \\ 2x & 3y & z \end{vmatrix} = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x & 4y & z \\ 4x & y & 5z \\ 3y & 7z & 6 \end{vmatrix} = 9, \\ 1.29. & \begin{vmatrix} 4x & y & 5z \\ 3y & 7z & 6 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

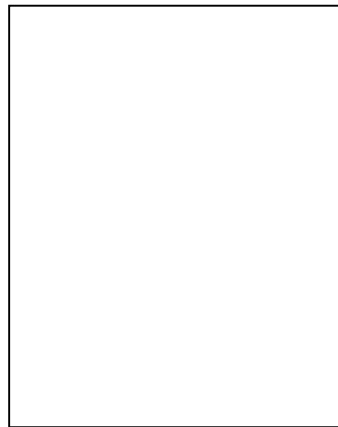
$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 7x & 4y & z \\ 3x & 2y & 3z \\ 2x & 3y & z \end{vmatrix} = 13, \\ 1.30. & \begin{vmatrix} 3x & 2y & 3z \\ 2x & 3y & z \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы

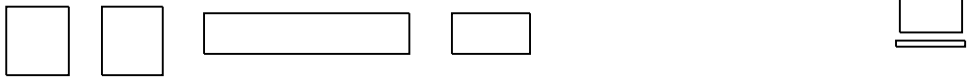
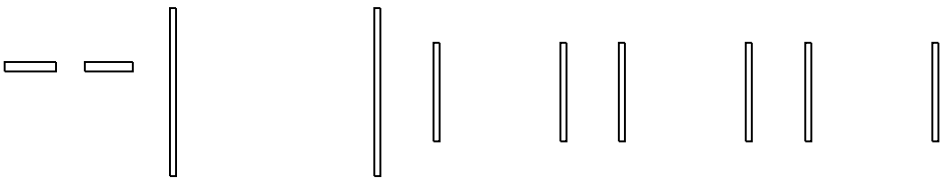
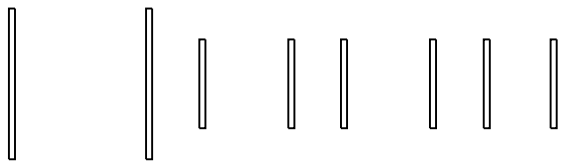
1. Что называется минором?
2. Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?
3. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
4. Какая матрица называется невырожденной?
5. Транспонированная матрица.
6. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
7. Каков порядок вычисления обратной матрицы?
8. Алгоритм решения простейшего матричного уравнения

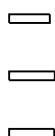
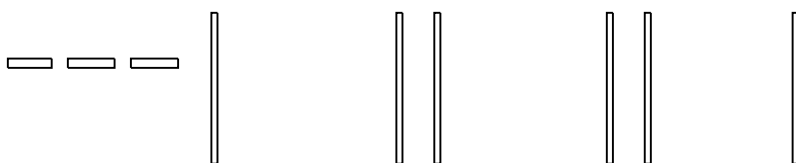
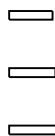
Практическая работа № 18 по теме

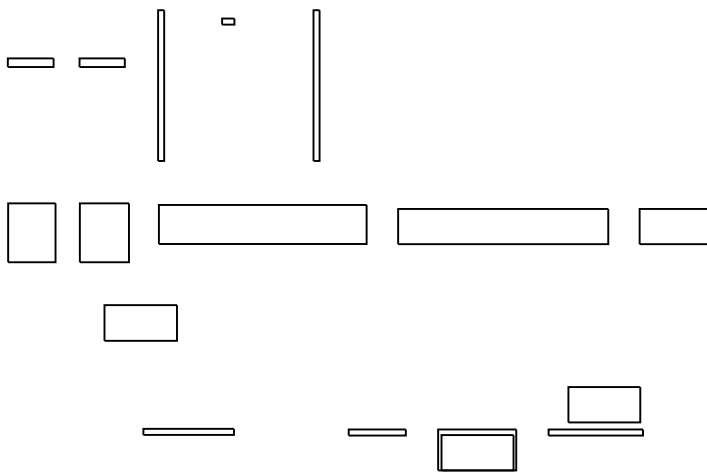
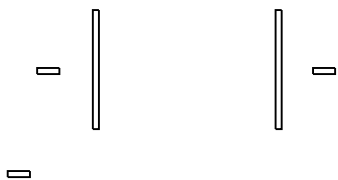
«Элементы векторной алгебры»

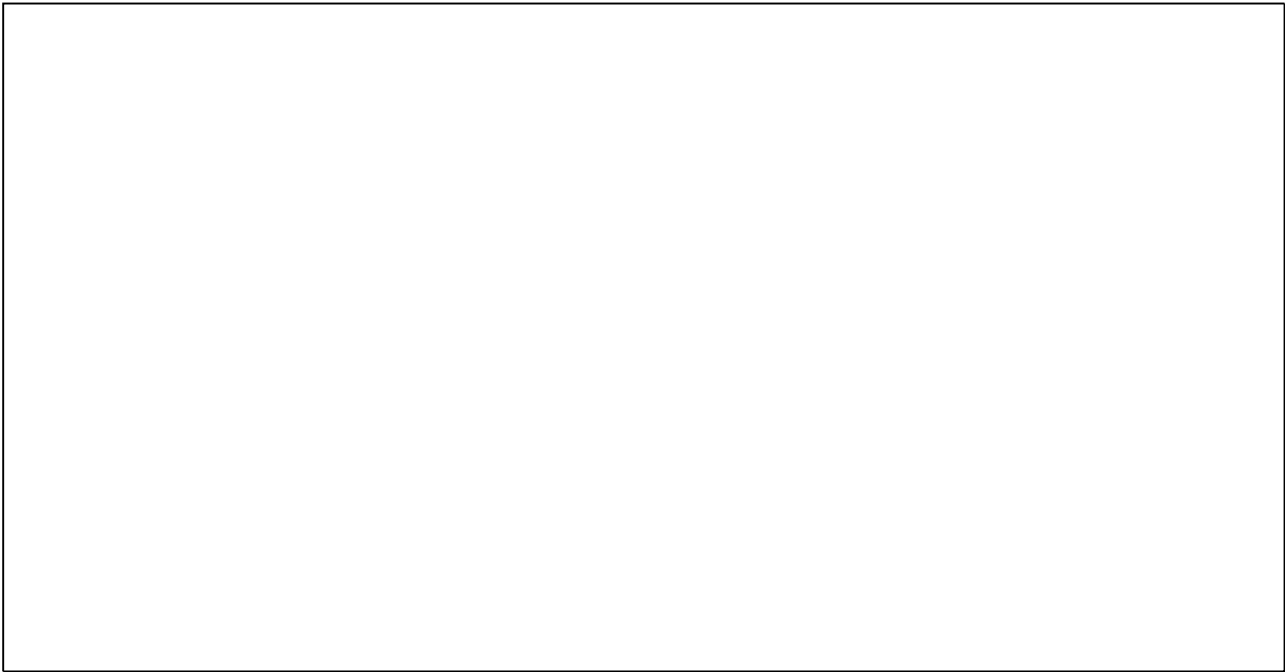
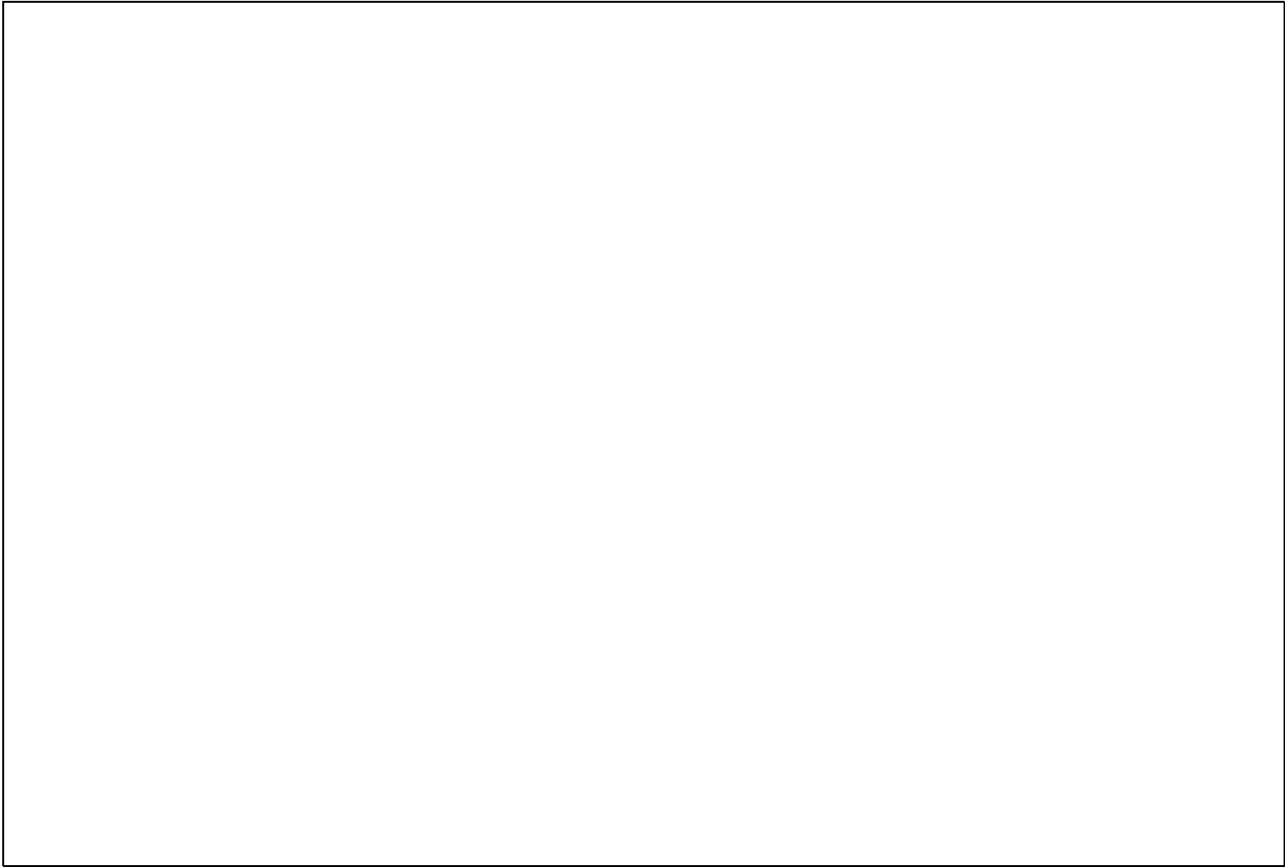


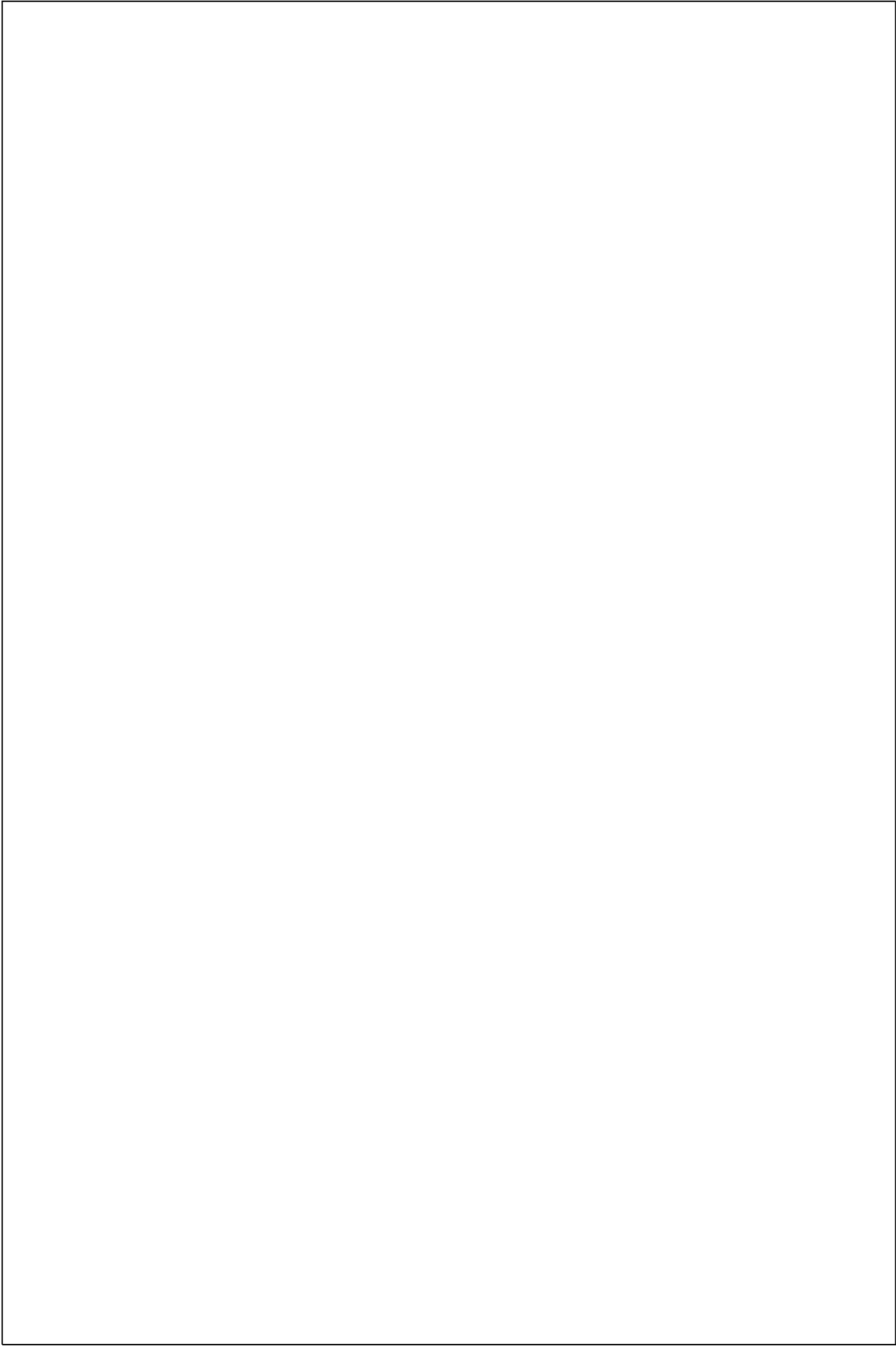


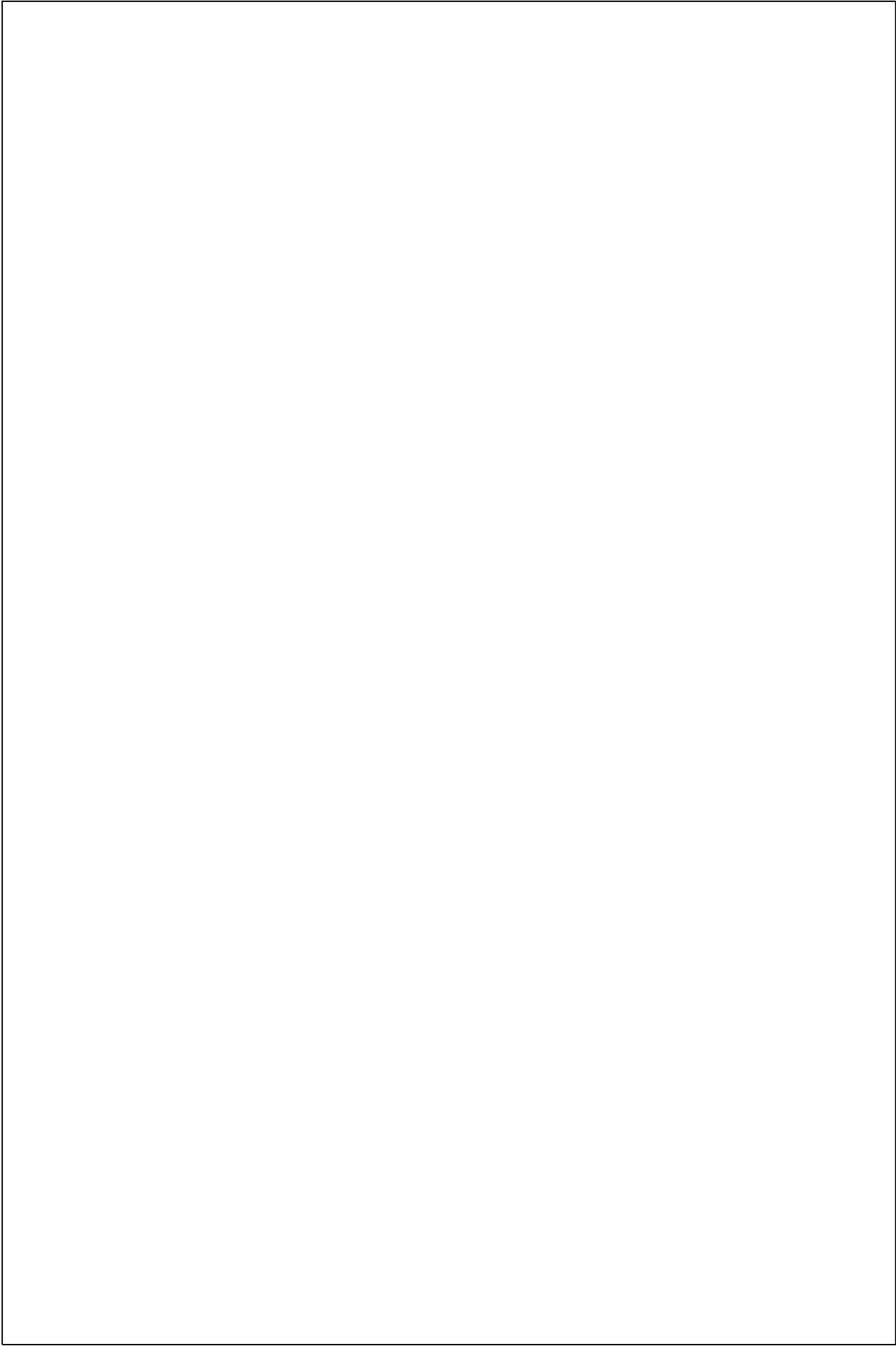


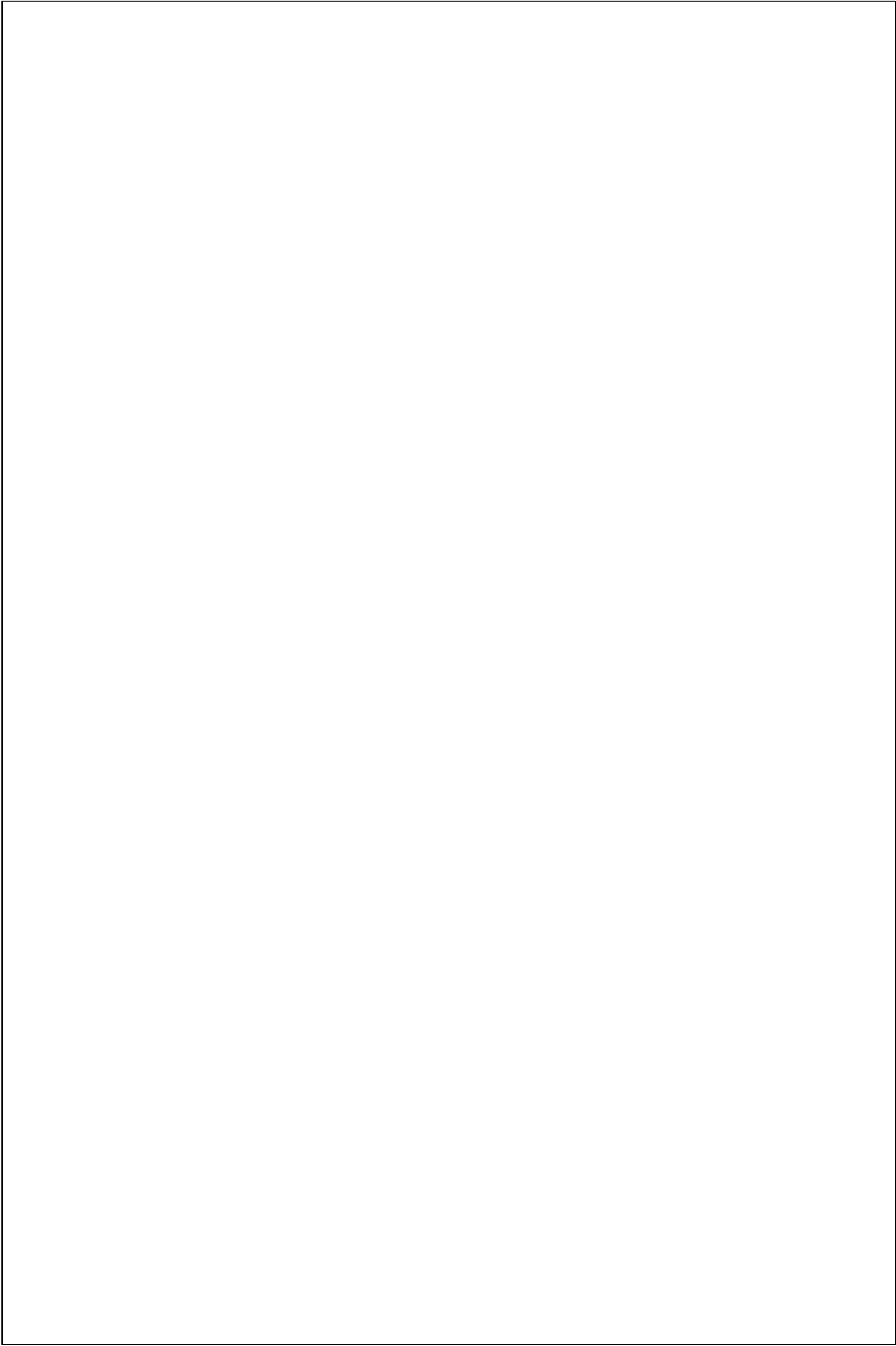


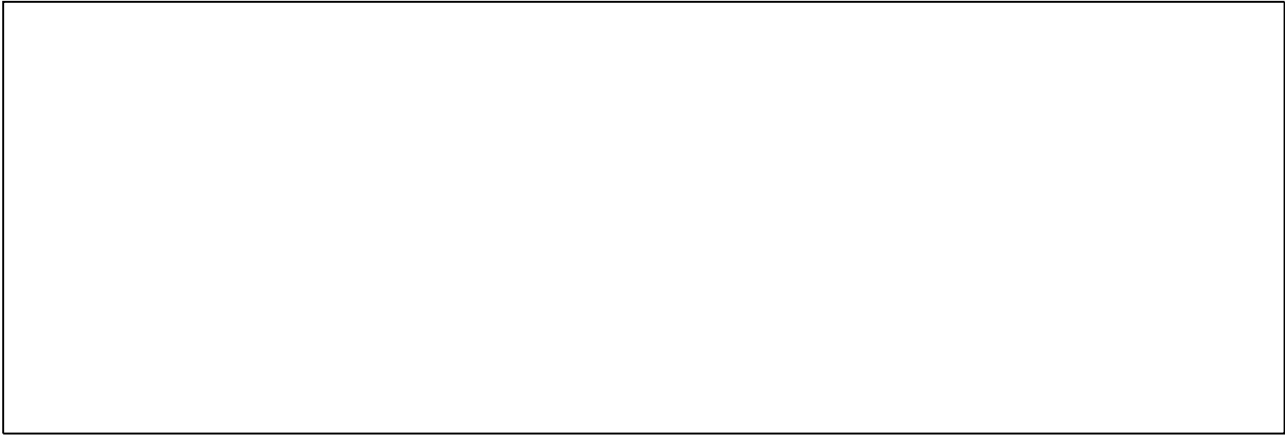












— —

— —

— —

— —

—

— —

— —

— — —

—

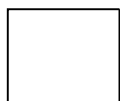
— — —

— —

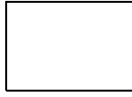
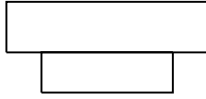
— —

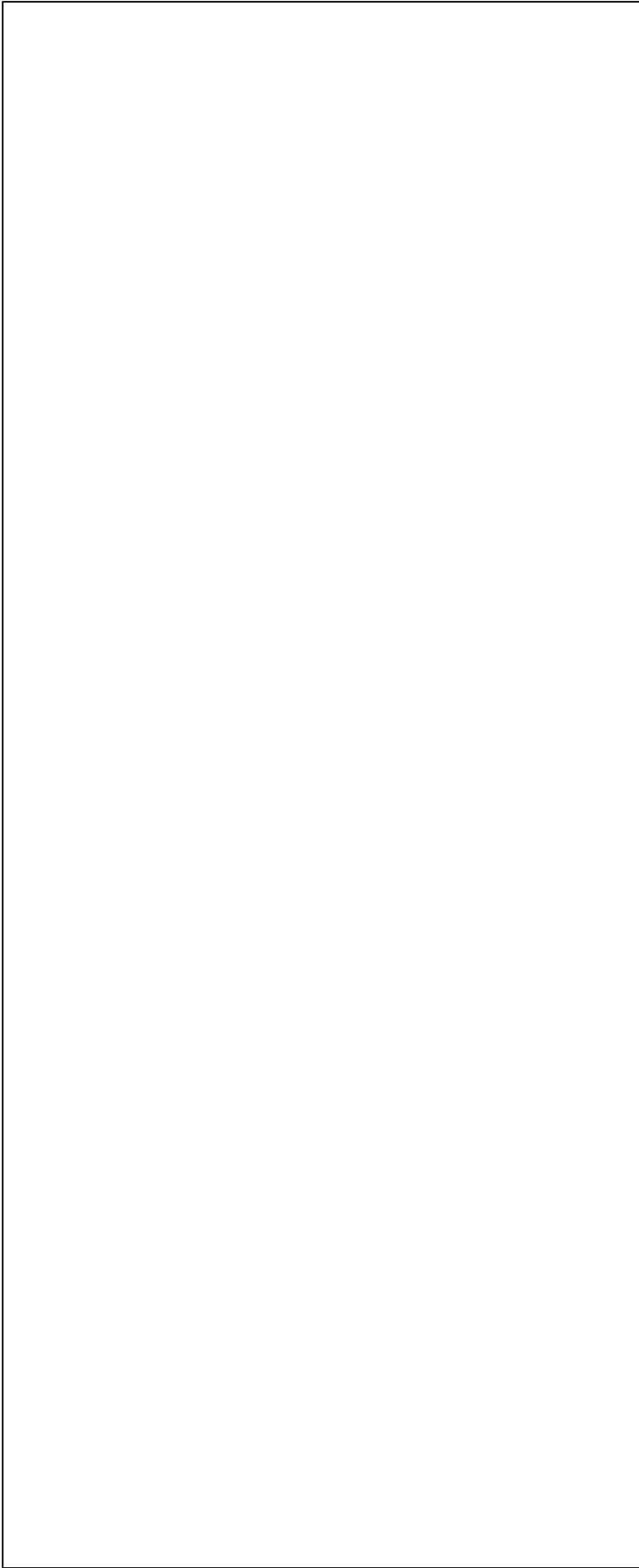
—— ——

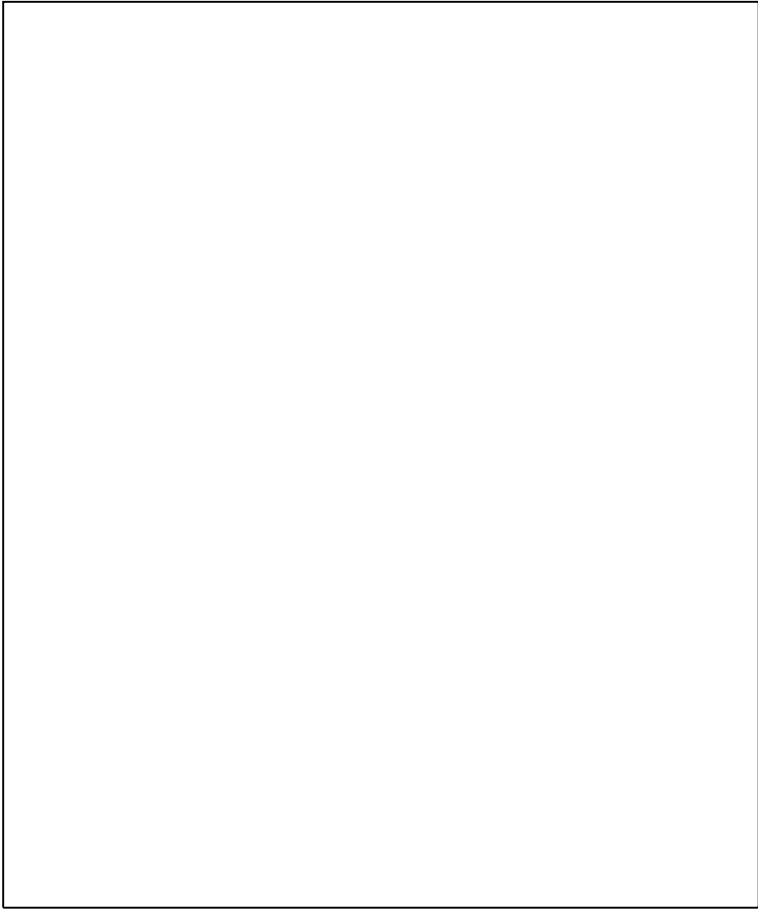
—— —— — —



—







— —

—

— —

—



2.26. Известны уравнения двух сторон ромба $2x - 5y - 1 = 0$ и $2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $x + 3y - 6 = 0$. Найти уравнение второй диагонали. *Ответ:* $3x - y - 23 = 0$;

2.27. Найти точку Е пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(3,1)$, $B(7, 5)$ и $C(5, -3)$. *Ответ:* $E(3;1)$

2.28. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 1)$ под углом 45° к прямой $2x + 3y = 6$. *Ответ:* $x - 5y - 6 = 0$; $5x - y - 4 = 0$

2.29. Даны уравнения высот треугольника ABC $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ и координаты его вершины $A(2, 3)$. Найти уравнения сторон AB и AC треугольника. *Ответ:* $2x - y - 1 = 0$ AB; $3x - 2y - 12 = 0$ AC

2.30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3, -1)$. Найти уравнения двух других сторон. *Ответ:* $x - y - 7 = 0$; $x - 2y - 10 = 0$

Практическая работа № 20

Тема «Составление уравнений кривых второго порядка (окружности, эллипса, гиперболы, параболы)»

Цель: проверить уровень усвоения материала по составлению уравнений кривых второго порядка (окружности, эллипса, параболы, гиперболы).

Время выполнения 90 минут

Материальное обеспечение

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

Порядок выполнения работы

1. Изучить задание

— —

— —

— —

==



==

== == == ==

==

☐

☐

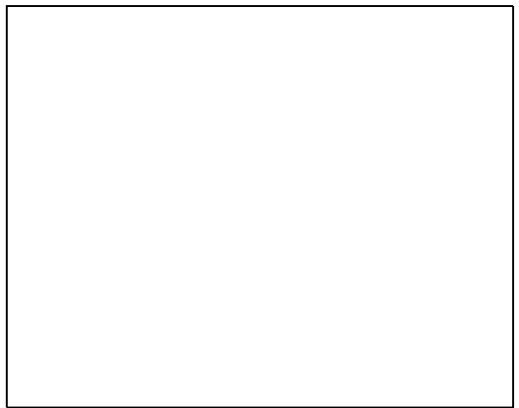
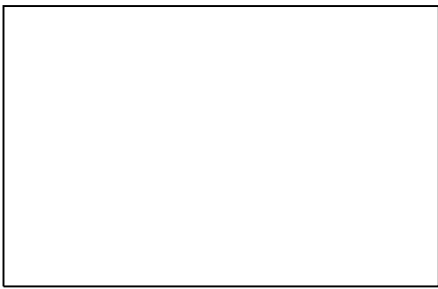
==

==

—

—

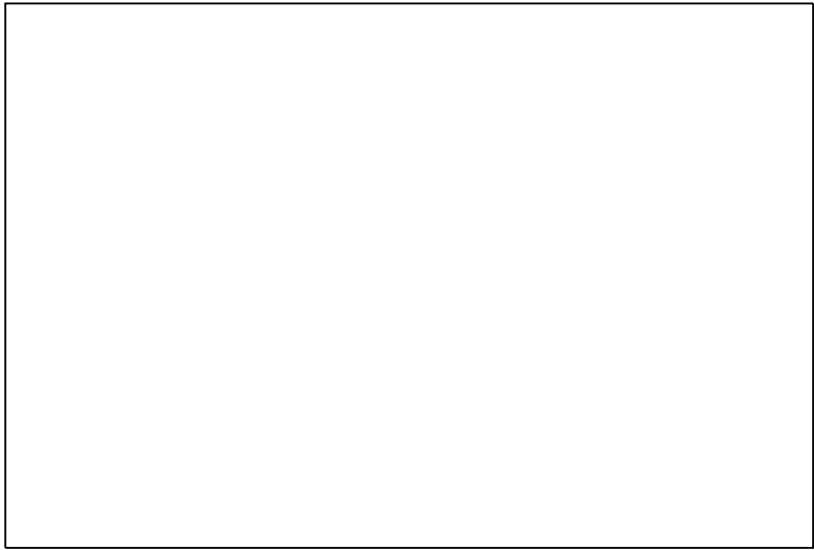
==



==

==

— —



□

□

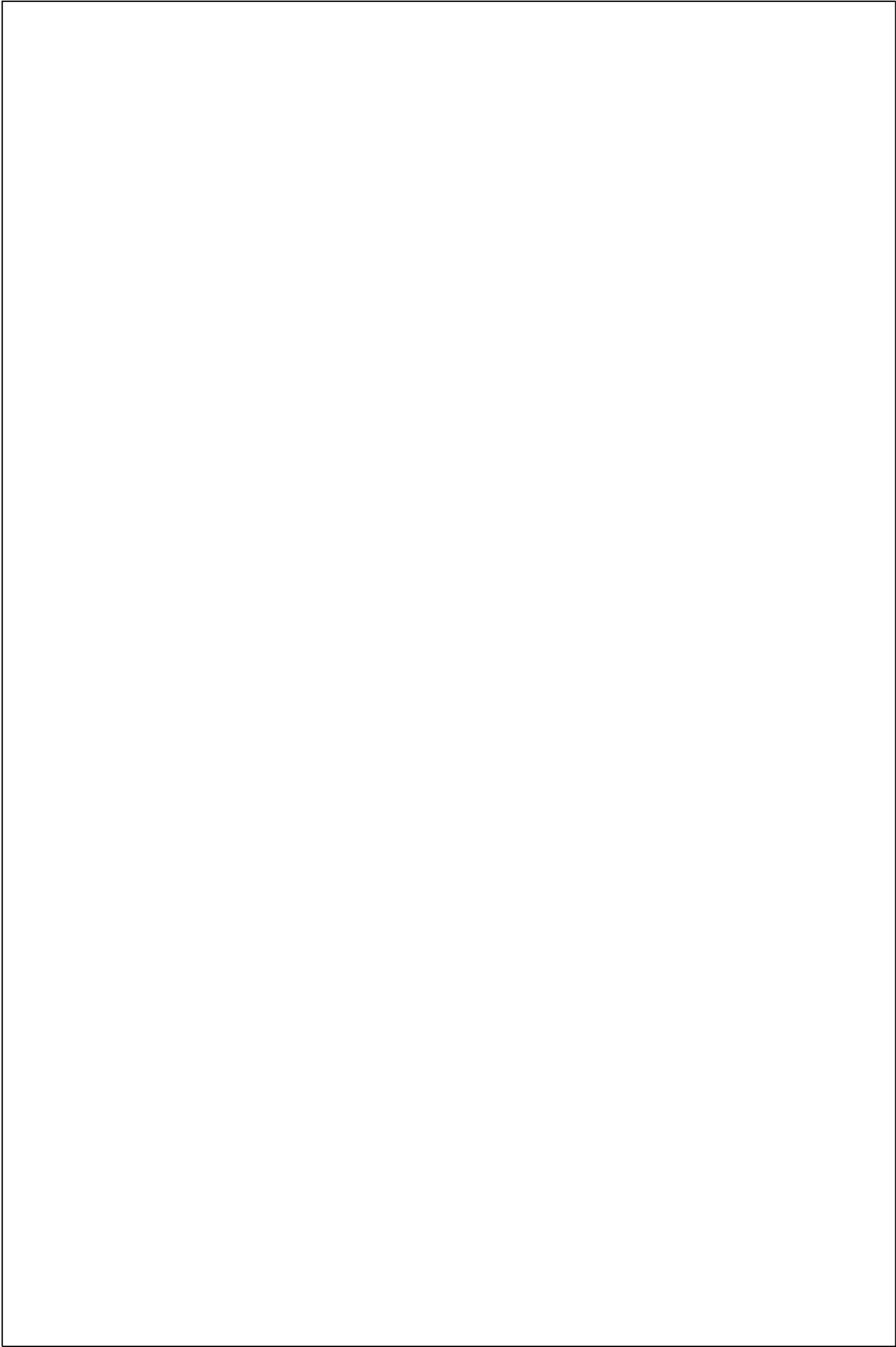
□

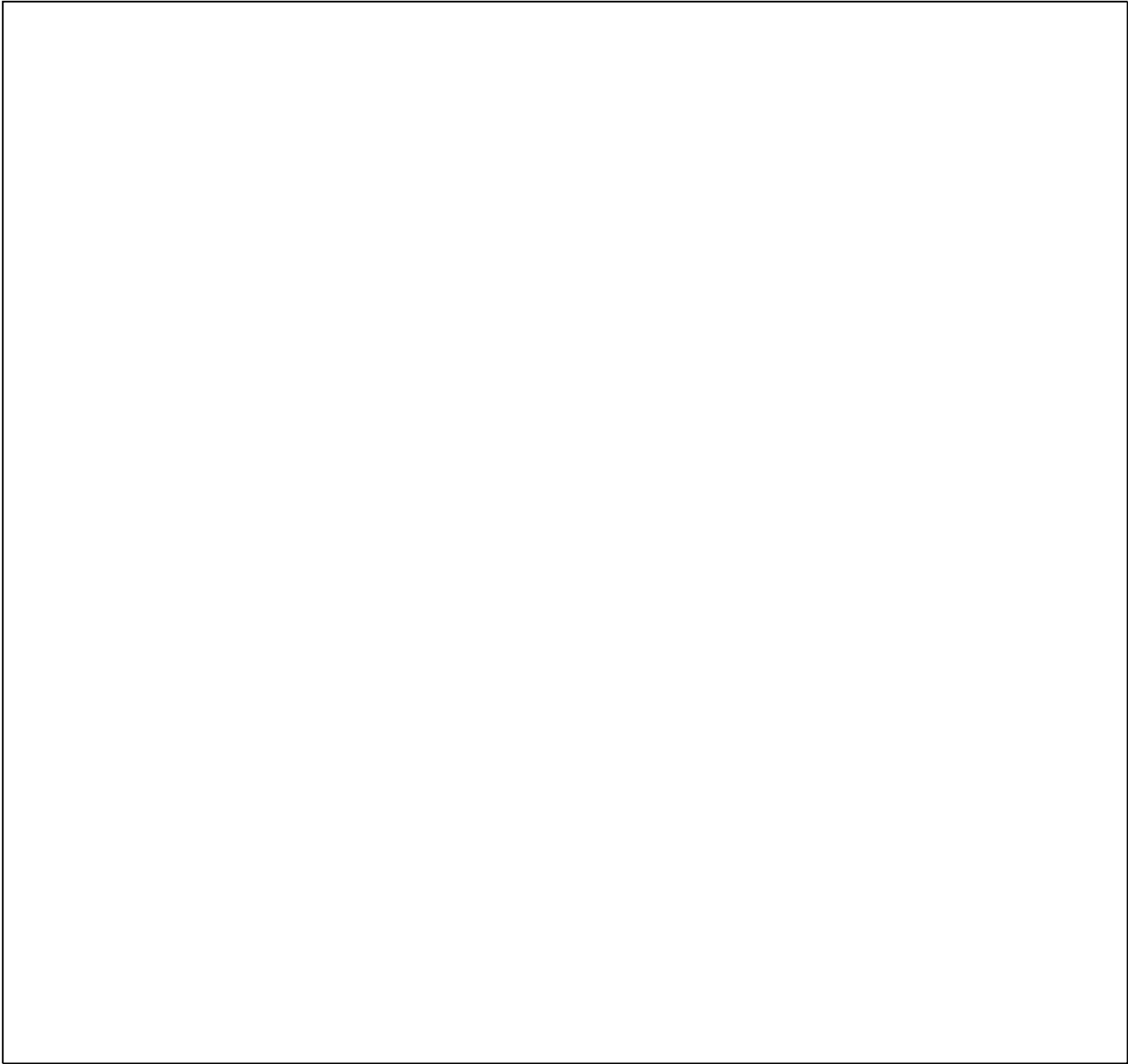
□

□

□







- 2.8. Вершину гиперболы $x^2 - 16y^2 = 64$, A(0, -2).
- 2.9. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$, A(0, -4).
- 2.10. O(0, 0), A - вершина параболы $y^2 = -(x + 5)/2$.
- 2.11. Правый фокус эллипса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, A(1, 7).
- 2.12. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 5y^2 = 30$, A(0, 6).
- 2.13. Фокусы эллипса $16x^2 - 41y^2 = 656$, A - его нижняя вершина.
- 2.14. Вершину гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 18$, A(0, 4).
- 2.15. Фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55$, A(0, 5).
- 2.16. B(1, 4), A - вершина параболы $y^2 = (x - 4)/3$.
- 2.17. Левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, A(-1, -3).
- 2.18. Левую вершину гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$, A(0, -6).
- 2.19. Фокусы эллипса $24x^2 - 25y^2 = 600$, A - его верхняя вершина.
- 2.20. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 = 48$, A(1, 3).
- 2.21. Левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, A(-1, -2).
- 2.22. B(2, -5), A - вершина параболы $x^2 = -2(y + 1)$.
- 2.23. Правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, A(2, -7).
- 2.24. Правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, A(-2, 5).
- 2.25. Фокусы эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, A - его нижняя вершина.
- 2.26. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, A(-5, -2).
- 2.27. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, A(0, -6).
- 2.28. B(3, 4), A - вершина параболы $y^2 = (x + 7)/4$.
- 2.29. Левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 837$, A(1, 8).
- 2.30. Правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648$, A(2, 8).

Контрольные вопросы

1. Запишите каноническое уравнение эллипса.
2. Запишите каноническое уравнение гиперболы.

