



---

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ**  
**ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»**  
**(БГТУ)**

---

Политехнический колледж (ПК БГТУ)

УТВЕРЖДАЮ  
Ректор ФГБОУ ВО "БГТУ"  
\_\_\_\_\_/О.Н. Федонин  
«28» мая 2024 г.

**Методические рекомендации для проведения практических работ**  
**по учебной дисциплине**  
**ЕН.01 Математика**

Специальность:	15.02.17 Монтаж, техническое обслуживание, эксплуатация и ремонт промышленного оборудования (по отраслям)
Уровень образования выпускника:	среднее профессиональное образование (СПО)
Программа подготовки специалиста среднего звена (ППССЗ):	базовая
Присваиваемая квалификация:	Техник-механик
Форма обучения:	очная
Срок получения СПО по ППССЗ:	3 года 10 месяцев
Уровень образования, необходимый для приема на обучение по ППССЗ:	основное общее образование

Брянск 2024

Методические рекомендации  
для проведения практических работ по учебной дисциплине ЕН.01 Математика  
для специальности 15.02.17 Монтаж, техническое обслуживание, эксплуатация  
и ремонт промышленного оборудования (по отраслям)

предназначены для закрепления знаний по изучаемому материалу и формированию умений, а также для проверки усвоения теоретического материала и умений решать различные математические задачи.

Разработал(и):

Преподаватель ПК БГТУ

Парфенова И.П.

Методическая разработка рассмотрена одобрена предметной комиссией  
«Математических и общих естественно научных дисциплин»

Протокол № 9 от «20» апреля 2023 г.

Председатель \_\_\_\_\_ Л.А. Лазарева

## **Область применения методических указаний**

Методические указания для выполнения практических работ являются частью примерной основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС по специальности СПО **15.02.12 Монтаж, техническое обслуживание и ремонт промышленного оборудования (по отраслям)**.

### **Цели и задачи методических указаний для выполнения практических работ:**

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать**:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления;
- основы теории комплексных чисел.

### **Формируемые компетенции**

**ОК 1.** Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

**ОК 2.** Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения профессиональной деятельности.

**ОК 3.** Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

**ОК 4.** Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

**ОК 5.** Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

**ОК 6.** Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения.

**ПК 1.1.** Осуществлять работы по подготовке единиц оборудования к монтажу.

**ПК 1.2.** Проводить монтаж промышленного оборудования в соответствии с технической документацией.

**ПК 1.3.** Производить ввод в эксплуатацию и испытания промышленного оборудования в соответствии с технической документацией.

**ПК 2.1.** Проводить регламентные работы по техническому обслуживанию промышленного оборудования в соответствии с документацией завода-изготовителя.

**ПК 2.2.** Осуществлять диагностирование состояния промышленного оборудования и дефектацию его узлов и элементов.

**ПК 2.3.** Проводить ремонтные работы по восстановлению работоспособности промышленного оборудования.

**ПК 2.4.** Выполнять наладочные и регулировочные работы в соответствии с производственным заданием.

**ПК 3.1.** Определять оптимальные методы восстановления работоспособности промышленного оборудования.

**ПК 3.2.** Разрабатывать технологическую документацию для проведения работ по монтажу, ремонту и технической эксплуатации промышленного оборудования в соответствии требованиями технических регламентов.

**ПК 3.3.** Определять потребность в материально-техническом обеспечении ремонтных, монтажных и наладочных работ промышленного оборудования.

**ПК 3.4.** Организовывать выполнение производственных заданий подчиненным персоналом с соблюдением норм охраны труда и бережливого производства.

**Рекомендуемое количество часов на освоение рабочей программы учебной дисциплины:**

Всего 72 часа, теоретическая работа 28 часов, практические работы 30 часов, самостоятельная работа 8 часов, консультации 6 часов.

**Перечень практических работ**

1	Практическая работа №1. Операции над матрицами. Вычисление определителей второго и третьего порядка.
2	Практическая работа №2. Решение СЛАУ различными способами.
3	Практическая работа №3. Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической, и показательной формах.
4	Практическая работа №4. Решение уравнений на множестве комплексных чисел.
5	Практическая работа № 5. Производная сложной функции. Геометрический и физический смысл производной.
6	Практическая работа № 6. Исследование функции и построение графика по результатам исследования.
7	Практическая работа №7. Вычисление площадей плоских фигур.
8	Практическая работа №8. Решение практических задач с применением интегралов.
9	Практическая работа № 9. Дифференциальные уравнения первого порядка.
10	Практическая работа № 10. Дифференциальные уравнения второго порядка.
11	Практическая работа № 11. Исследование сходимости числовых рядов.
12	Практическая работа № 12. Нахождение производной численным методом.
13	Практическая работа № 13. Численное решение дифференциального уравнения.
14	Практическая работа № 14. Решение задач на нахождение вероятности.
15	Практическая работа № 15. Случайная величина. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

## **Практическая работа № 1**

**по теме «Операции над матрицами. Вычисление определителей второго и третьего порядка.»**

**Цель:** научиться вычислять определители второго и третьего порядка.

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Ход работы**

**Теоретические сведения**

**Определение.** Матрицей размера  $m \times n$ , где  $m$ - число строк,  $n$ - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются  $a_{ij}$ , где  $i$ - номер строки, а  $j$ - номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Виды матриц**

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

**Определение.** Если число столбцов матрицы равно числу строк ( $m=n$ ), то матрица называется **квадратной**.

**Определение.** Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

**Определение.** Если  $a_{mn} = a_{nm}$ , то матрица называется **симметрической**.

**Пример.**  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$  - симметрическая матрица

**Определение.** Квадратная матрица вида  $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  называется

диагональной матрицей.

### Действия с матрицами

**Сложение и вычитание** матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

**Суммой (разностью)** матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$C = A + B = B + A.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha (A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

**Пример.** Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ , найти  $2A + B$ .

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

**Произведением** матриц  $A \cdot B = C$ ; называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй**.

**Определение.** Матрицу В называют **транспонированной** матрицей А, а переход от А к В **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы А записать в том же порядке в столбцы матрицы В.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами,  $b_{ji} = a_{ij}$ .

**Пример.** Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  и число  $\alpha = 2$ . Найти

$A^T B + \alpha C$ .

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

**Пример.** Найти произведение матриц  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  и  $B = (2 \ 4 \ 1)$ .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = (2 \ 4 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

**Пример.** Найти произведение матриц  $A = (1 \ 2)$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (3 + 10 \quad 4 + 12) = (13 \ 16).$$

**Определителем второго порядка** называется число, которое поставлено в

соответствие таблицы коэффициентов  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

по следующему правилу: произведение по главной диагонали берется со знаком плюс, по другой диагонали со знаком минус.



$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \mathbf{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Пример: вычислить определитель второго порядка

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 4 - 12 = -8$$

$$2) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = -1 + 6 = 5$$

**Определителем третьего порядка** называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Это определение определителя наглядно можно представить следующим образом:

The diagram illustrates the addition and subtraction of two 3x3 determinants. It shows two sets of 3x3 grids of variables  $a_i, b_i, c_i$ . The first set is labeled with a plus sign (+) and the second set with a minus sign (-). Arrows indicate the flow of the operation.

Это правила называют еще «Правило треугольника»

**Пример.** Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 5 =$$
$$= 36 + 4 + 10 - 4 - 12 - 30 = 4$$

**Системой линейных алгебраических уравнений**, содержащей  $m$  уравнений и  $n$  неизвестных, называется система вида:

[illegible]

где числа  $a_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$  называются коэффициентами системы, числа  $b_i$  – свободными членами. Подлежат нахождению числа  $x_n$ .

Здесь  $A$  – матрица коэффициентов системы, называемая *основной матрицей*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор – столбец из неизвестных } x_j$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{вектор – столбец из свободных членов } b_j$$

Произведение матриц  $A * X$  определено, так как в матрице  $A$  столбцов столько же, сколько строк в матрице  $X$  ( $n$  штук).

*Расширенной* матрицей системы называется матрица  $\bar{A}$  системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

*Решением системы* называется  $n$  значений неизвестных  $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ , при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верными равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместимой**, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое её решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

*Решить систему* – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти её общее решение.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

[illegible]

**Пример 4.3.** Решить систему  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$

Значит,  $x_1 = \frac{7}{7} = 1$ ,  $x_2 = \frac{14}{7} = 2$

**Теорема.** Система из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

Суть **метода Гаусса** заключается в последовательном исключении неизвестных.

[illegible]

Получим:

[illegible]

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad j = 2, 3, \dots, n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом — для третьего и т.д.

К элементарным преобразованиям относятся:

- 1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.
- 2) Перестановка уравнений местами.
- 3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех  $x$ .

### Задания для проведения практической работы

1. Вычислить определители второго порядка:

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} -\kappa_1 & 2+\kappa_2 \\ \kappa_1 \cdot \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}, \quad 2) \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\kappa_1}{3} & 5^2 \\ 3 \cdot \kappa_2 & 6 \end{vmatrix}, \quad 3) \Delta = \begin{vmatrix} 9^{0,5} & \kappa_1 \cdot 64^{\frac{1}{6}} \\ (0,5)^{-3} & \sqrt{4^2} \end{vmatrix}$$

2. Вычислить определители третьего порядка:

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3\kappa_1 & 2 \\ 2 & 8 & \kappa_2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 2) \Delta = \begin{vmatrix} 3\kappa_2 & 4 & -5 \\ 8 & 7\kappa_2 - 2 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, \quad 3) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \kappa_1 \cdot \kappa_2 \\ 3 & \kappa_1 & -5 \\ 2 & \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$$

3. Решить систему уравнений методом Крамера, сделать проверку:

$$1. \begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y + 3z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases} \quad 7. \begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = 24, \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x + z = -7. \end{cases} \quad 10. \begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 5y + 4z = -20, \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases} \quad 11. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10. \end{cases} \quad 12. \begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 12, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 4x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases} \quad 14. \begin{cases} 2x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 4z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases} \quad 15. \begin{cases} 2x - y + 2z = 8, \\ x + y + 2z = 11, \\ 4x + y + 4z = 22. \end{cases} \quad 16. \begin{cases} 2x - y - 3z = -9, \\ x + 5y + z = 20, \\ 3x + 4y + 2z = 15. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 1, \\ x + 5y + z = -3. \end{cases} \quad 18. \begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8, \\ 3x + y + z = -4, \\ x - 4y - 2z = -9. \end{cases} \quad 19. \begin{cases} 3x + y + z = -4, \\ -3x + 5y + 6z = 36, \\ x - 4y - 2z = 19. \end{cases} \quad 20. \begin{cases} 3x - y + z = -11, \\ 5x + y + 2z = 8, \\ x + 2y + 4z = 16. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 3x - y + z = 9, \\ 5x + y + 2z = 11, \\ x + 2y + 4z = 19. \end{cases} \quad 22. \begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases} \quad 23. \begin{cases} 2x + 3y + z = 12, \\ 2x + y + 3z = 16, \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases} \quad 24. \begin{cases} x - 2y + 3z = 14, \\ 2x + 3y - 4z = -16, \\ 3x - 2y - 5z = -8. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11, \\ 2x - y - z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x + 5y - 6z = -15, \\ 3x + y + 4z = 13, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 4x - y = -6, \\ 3x + 2y + 5z = -14, \\ x - 3y + 4z = -19. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 5x + 2y - 4z = -16, \\ x + 3z = -6, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x + 4y - z = -9, \\ 4x - y + 5z = -2, \\ 3y - 7z = -6. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 7x + 4y - z = 13, \\ 3x + 2y + 3z = 3, \\ 2x - 3y + z = -10. \end{cases}$$

Вариант	$\kappa_1$	$\kappa_2$	Вариант	$\kappa_1$	$\kappa_2$	Вариант	$\kappa_1$	$\kappa_2$
1	3	-2	11	4	-1	21	-2	4
2	4	1	12	5	1	22	1	3
3	3	-4	13	2	0	23	-3	2
4	2	1	14	-2	1	24	-4	-1
5	3	-3	15	2	-2	25	-1	5
6	1	5	16	0	7	26	4	-2
7	-2	3	17	-1	4	27	-1	3
8	6	-2	18	-3	3	28	2	-3
9	-6	1	19	-4	1	29	-2	5
10	-5	1	20	0	8	30	-5	-1

### Контрольные вопросы:

Что называется определителем матрицы?

Как вычислить определитель второго порядка?

Какие способы вычисления определителя третьего порядка вам известны?

Перечислите свойства определителей.

Сформулируйте теорему Крамера.

Алгоритм применения метода Гаусса.

### Ответы

вариант	1 задание			2 задание			вариант	1 задание			2 задание		
	1	2	3	1	2	3		1	2	3	1	2	3
1.	-1	6	-5	-84	-220	127	16.	-1	63	-24	-89	-100	109
2.	-3	-63	-24	-63	-68	55	17.	-4	-65	68	-72	-68	45
3.	-3	6	-18	-10	237	26	18.	-1	4	-11	-52	232	60
4.	-1	-71	-20	-45	-68	63	19.	1	-79	14	-9	-68	59

5.	- 2 4	-219	- 18 0	- 94	121 2	18 5	20.	- 1 0	14 6	- 11 6	-64	-220	90
6.	- 4 0	-373	-52	- 20	402 8	14 5	21.	0	- 92 5	12	-21	8092	85
7.	4 0	-229	14 0	- 19	130 8	-23	22.	2 9	- 30 2	76	-24	2500	9
8.	- 3 0	162	- 37 2	- 13 8	- 220	28 6	23.	4 5	23 1	20 4	-16	1308	- 85
9.	4 8	-87	39 6	27	-68	-65	24.	3 2	- 83	26 8	9	-68	-9
10.	4 0	-85	33 2	18	-68	-35	25.	0	- 60 0	12	-20	10628	90
11.	1 0	-304	14 0	- 24	250 0	-68	26.	- 2 0	15 8	- 24 4	- 10 2	-220	17 2
12.	- 2 0	-223	-52	- 36	130 8	91	27.	2 0	- 22 7	76	-18	1308	27
13.	3 9	156	20 4	-8	452	-27	28.	1 4	22 9	- 11 6	-73	1212	12 3
14.	1 6	63	26 8	31	- 100	45	29.	8 0	- 37 9	- 14 0	-29	4028	- 12 5
15.	4 0	-377	76	- 26	402 8	-15	30.	3 0	65	33 2	46	-100	55
вариант Δ	1 12,36,24,1 2		2 -6,12,18,2			3 -12,36,24,- 12		4 8,-8,28,4		5 -60,0,240,- 300			
х, у, z	3, 2, 1		-2, 3, -1/3			3, -2, 1		-1, 3, 5, 0, 5		0, -3, 5			
вариант Δ	6 -1,-1,-6,-5		7 1,3,-6,-1			8		9 61,- 122,244,61		10 96,96,0,- 480			

			-261, - 1827, 1305, -261		
x, y, z	1 ,6, 5	3, -6, -1	7, 5, 1	-2, 4, 1	1, 0,-5
вариант Δ	11 -60,- 300,60,-60	12 58,174,116,0	13 -6,-6,6,-24	14 6,0,12,6	15 -6,-6,-12,- 24
x, y, z	5, -1, 1	3, 2, 0	1, -1, 4	0, 2, 1	1, 2, 4
вариант Δ	16 44,- 44,176,44	17 -44,-44,44,-44	18 -49,49,- 245,294	19 49,-109,- 651,782	20 27,0,270,- 27
x, y, z	-1, 4, 1	1, -1, 1	-1, 5, -6	-109/49, - 93/7, 782/49	0, 10, -1
вариант Δ	21 27,9,- 60,156	22 12,-12,24,0	23 12,- 12,36,60	24 -58,- 58,116,-174	25 -60,-180,- 60,-60
x, y, z	1/3,- 20/9,52/9	-1, 2, 0	-1, 3, 5	1, -2, 3	3, 1, 1
вариант Δ	26 104,208,- 104, 208	27 99,-99,198,- 297	28 67,-150,- 329,-84	29 92, -92, - 184, 0	30 102,0,306,- 102
x, y, z	2, -1, 2	-1, 2, -3	-150/67, -329/67, -84/67	-1, -2, 0	0, 3, -1

## Практическая работа № 2

по теме «Решение матричных уравнений, СЛАУ матричным методом».

**Цель:** научиться вычислять миноры, алгебраические дополнения, находить обратные матрицы, решать простейшие матричные уравнения, СЛАУ матричным методом.

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения

2. Задание

3. Лист А4

4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Ход работы**

**Теоретические сведения**

**Минором** некоторого элемента  $a_{ij}$  определителя  $n$ -го порядка называется определитель  $n - 1$ -го порядка, полученный из исходного путём вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается  $m_{ij}$ .

$$\text{Так если } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то } m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

**Алгебраическим дополнением** элемента  $a_{ij}$  определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма  $i + j$  – чётное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечётная. Обозначается  $A_{ij}$ :  $A_{ij} = (-1)^{i+j} * m_{ij}$ .

Так,  $A_{11} = +m_{11}$ ,  $A_{32} = -m_{32}$ .

**Свойство** («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»).  
Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3-го порядка. В этом случае свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} * A_{11} + a_{12} * A_{12} + a_{13} * A_{13}$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} a_{11} * A_{11} + a_{12} * A_{12} + a_{13} * A_{13} &= a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} * \left( - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + \\ a_{13} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) &= \end{aligned}$$



$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta$$

Свойство содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

**Пример.** Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 * \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 * (7 * 3 * 4 + (-1) * 0 * 2 + 5 * 7 * 1 - (-1) * 3 * 1 - 7 * 7 * 2 - 5 * 0 * 4) + (5 * 3 * 4 + (-1) * 7 * 2 + 5 * 7 * 8 - (-1) * 3 * 8 - 5 * 7 * 4 - 5 * 7 * 2) - (5 * 0 * 2 + 7 * 1 * 5 + 7 * 3 * 8 - 5 * 0 * 8 - 3 * 1 * 5 - 7 * 7 * 2) = 122$$

**Свойство.** Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например,  $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$

**Нахождение обратной матрицы.**

Пусть  $A$  – квадратная матрица  $n$ -го порядка  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Квадратная матрица  $A$  называется **невырожденной**, если определитель  $\Delta = \det A$  не равен нулю:  $\Delta = \det A \neq 0$ . В противном случае ( $\Delta = 0$ ) матрица  $A$  называется **вырожденной**.

Матрицей, **союзной к матрице**  $A$ , называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  данной матрицы  $A$  (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Матрица  $A^{-1}$  называется **обратной** матрице  $A$ , если выполняется условие  $A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$ ,

где  $E$  – единичная матрица того же порядка, что и матрица  $A$ . Матрица  $A^{-1}$  имеет те же размеры, что и матрица  $A$ .

## Обратная матрица.

**Теорема** Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \text{ т. е. } A^{-1} = \frac{1}{\det A} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Отметим свойства обратной матрицы:

1.  $\det(A^{-1}) = 1 / \det A$ ;
2.  $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$ ;
3.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .

**Пример.** Найти  $A^{-1}$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: 1) Находим  $\det A$ :  $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$

2) Находим  $A^*$ :  $A_{11} = 1$ ,  $A_{21} = -3$ ,  $A_{12} = -(-1) = 1$ ,  $A_{22} = 2$ ,

поэтому  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) Находим  $A^{-1}$ :  $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Проверка:

$$A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 + 3/5 & -6/5 + 6/5 \\ -1/5 + 1/5 & 3/5 + 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

**Пример.** Определить при каких значениях  $\alpha$  существует матрица, обратная данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Найдём определитель матрицы  $A$ :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2\alpha - 12 - 0 + 2\alpha = 4\alpha - 9$$

Если  $4\alpha - 9 = 0$ , т.е.  $\alpha = 9/4$ , то  $\Delta A = 0$ , т.е. матрица  $A$  невырожденная, имеет обратную.

**Пример.** Показать, что матрица  $A$  является обратной для  $B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдём произведение матриц  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} A * B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 - 3 + 1 & -3 + 5 - 2 & 1 - 2 + 1 \\ 3 - 6 + 3 & -3 + 10 - 6 & 1 - 4 + 3 \\ 3 - 9 + 6 & -3 + 15 - 12 & 1 - 6 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Аналогично  $B * A = E$ , следовательно, матрица  $A$  является обратной для  $B$ .

[illegible]

Основная матрица  $A$  такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Найдём решение данной системы уравнений в случае  $\Delta \neq 0$ .

Отыскание решения системы по формуле (4.1) называют *матричным способом* решения системы.

## Задание 1

Даны определители: 1)  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \kappa_1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3\kappa_2 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ , 2)  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & \kappa_2 \\ -2 & 3 & \kappa_1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ,

- 1) Найти миноры и алгебраические дополнения элементов  $a_{i3}$ ,  $a_{2j}$
- 2) Вычислить определители, разложив их по элементам а)  $i$ -ой строки, б)  $j$ -го столбца

Вариант	$\kappa_1$	$\kappa_2$	i	j	Вариант	$\kappa_1$	$\kappa_2$	i	j
1	3	-2	1	2	16	4	-1	2	1
2	4	1	2	1	17	5	1	1	2
3	3	-4	1	3	18	2	0	3	1
4	2	1	3	4	19	-2	1	4	3
5	3	-3	4	1	20	2	-2	1	4
6	1	5	2	2	21	0	7	2	2
7	-2	3	1	4	22	-1	4	4	1
8	6	-2	4	3	23	-3	3	3	4
9	-6	1	2	1	24	-4	1	1	2
10	-5	1	1	1	25	0	8	1	1
11	-2	4	3	2	26	4	-2	2	3
12	1	3	4	3	27	-1	3	3	4
13	-3	2	2	4	28	2	-3	4	2

<b>14</b>	-4	-1	1	2	<b>29</b>	-2	5	2	1
<b>15</b>	-1	5	3	1	<b>30</b>	-5	-1	1	3

**Задание 2.** Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -\kappa_2 & 4 \end{pmatrix}$ . Найти

а)  $A^{-1}$  и проверить, что  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

б)  $A + A^{-1}$

<b>Вариант</b>	$\kappa_1$	$\kappa_2$	<b>Вариант</b>	$\kappa_1$	$\kappa_2$
<b>1</b>	3	-2	<b>16</b>	4	-1
<b>2</b>	4	1	<b>17</b>	5	1
<b>3</b>	3	-4	<b>18</b>	2	0
<b>4</b>	2	1	<b>19</b>	-2	1
<b>5</b>	3	-3	<b>20</b>	2	-2
<b>6</b>	1	5	<b>21</b>	0	7
<b>7</b>	-2	3	<b>22</b>	-1	4
<b>8</b>	6	-2	<b>23</b>	-3	3
<b>9</b>	-6	1	<b>24</b>	-4	1
<b>10</b>	-5	1	<b>25</b>	0	8
<b>11</b>	-2	4	<b>26</b>	4	-2
<b>12</b>	1	3	<b>27</b>	-1	3
<b>13</b>	-3	2	<b>28</b>	2	-3
<b>14</b>	-4	-1	<b>29</b>	-2	5
<b>15</b>	-1	5	<b>30</b>	-5	-1

### Задание 3

1. Решить системы уравнений с помощью обратной матрицы (матричным методом).

$$1.1. \begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$$

$$1.3. \begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y + 3z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$$

$$1.5. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$$

$$1.6. \begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases}$$

$$1.7. \begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases}$$

$$1.8. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = 24, \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$$

$$1.9. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x + z = -7. \end{cases}$$

$$1.10. \begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 5y + 4z = -20, \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases}$$

$$1.11. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10. \end{cases}$$

$$1.12. \begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 12, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$$

$$1.13. \begin{cases} 4x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

$$1.14. \begin{cases} 2x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 4z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

$$1.15. \begin{cases} 2x - y + 2z = 8, \\ x + y + 2z = 11, \\ 4x + y + 4z = 22. \end{cases}$$

$$1.16. \begin{cases} 2x - y - 3z = -9, \\ x + 5y + z = 20, \\ 3x + 4y + 2z = 15. \end{cases}$$

$$1.17. \begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 1, \\ x + 5y + z = -3. \end{cases}$$

$$1.18. \begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8, \\ 3x + y + z = -4, \\ x - 4y - 2z = -9. \end{cases}$$

$$1.19. \begin{cases} 3x + y + z = -4, \\ -3x + 5y + 6z = 36, \\ x - 4y - 2z = 19. \end{cases}$$

$$1.20. \begin{cases} 3x - y + z = -11, \\ 5x + y + 2z = 8, \\ x + 2y + 4z = 16. \end{cases}$$

$$1.21. \begin{cases} 3x - y + z = 9, \\ 5x + y + 2z = 11, \\ x + 2y + 4z = 19. \end{cases}$$

$$1.22. \begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$$

$$1.23. \begin{cases} 2x + 3y + z = 12, \\ 2x + y + 3z = 16, \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$$

$$1.24. \begin{cases} x - 2y + 3z = 14, \\ 2x + 3y - 4z = -16, \\ 3x - 2y - 5z = -8. \end{cases}$$

$$1.25. \begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11, \\ 2x - y - z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

$$1.26. \begin{cases} x + 5y - 6z = -15, \\ 3x + y + 4z = 13, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

$$1.27. \begin{cases} 4x - y = -6, \\ 3x + 2y + 5z = -14, \\ x - 3y + 4z = -19. \end{cases}$$

$$1.28. \begin{cases} 5x + 2y - 4z = -16, \\ x + 3z = -6, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

$$1.29. \begin{cases} x + 4y - z = -9, \\ 4x - y + 5z = -2, \\ 3y - 7z = -6. \end{cases}$$

$$1.30. \begin{cases} 7x + 4y - z = 13, \\ 3x + 2y + 3z = 3, \\ 2x - 3y + z = -10. \end{cases}$$

## Ответы

### Задание 1

вариант	M <sub>i3</sub>	M <sub>2j</sub>	A <sub>i3</sub>	A <sub>2j</sub>	Δ	вариант	M <sub>i3</sub>	M <sub>2j</sub>	A <sub>i3</sub>	A <sub>2j</sub>	Δ
1.	-72	-52	72	52	58	16.	-33	15	33	-15	24
	50	-30	-50	30	160		-25	65	25	-65	175
2.	9	15	-9	-15	18	17.	-27	26	-27	26	14
	-15	55	-15	-55	145		50	-15	-50	-15	160
3.	14	-88	-14	88	82	18.	-19	5	-19	-5	47
	50	-40	50	40	180		-12	60	-12	-60	120
4.	-19	6	-19	6	26	19.	15	-33	-15	33	42
	-19	10	19	10	115		-2	-15	2	15	55
5.	7	10	-7	-10	70	20.	-72	24	72	24	89
	-11	75	-11	75	170		50	10	-50	10	130
6.	36	54	-36	54	-90	21.	35	25	-35	25	-
	5	5	-5	5	100		15	15	-15	15	115

7.	93	-6	93	-6	-72	22.	74	-10	-74	10	-106
	50	10	50	10	85		10	40	-10	-40	100
8.	46	-58	-46	58	-20	23.	-44	-6	-44	-6	-86
	-8	-30	8	30	250		-33	10	-33	10	80
9.	-61	-35	61	35	58	24.	27	-73	-27	-73	50
	-15	55	15	-55	-5		50	-15	50	-15	25
10.	27	-30	-27	30	54	25.	258	-5	-258	5	-239
	50	55	-5	-55	10		50	20	-50	-20	120
11.	-39	-78	-39	-78	-129	26.	-54	-54	54	54	27
	-40	0	40	0	100		-30	-30	30	-30	190
12.	21	12	-21	-12	-30	27.	-34	-6	-34	-6	-58
	7	-5	-7	5	100		-33	10	-33	10	90
13.	-40	0	40	0	-20	28.	-13	-115	13	-115	110
	-10	10	10	10	60		-11	-35	11	-35	135
14.	-39	-19	-39	-19	200	29.	-21	-15	21	15	-186
	50	-25	-50	-25	-25		5	35	-5	-35	115
15.	-34	-10	-34	10	-154	30.	-39	-42	-39	42	222
	-47	35	-47	-35	110		50	-25	-50	25	-50

## Задание 2

<b>1</b> $\left  \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 15 & -8 \\ 1 & -12 & 7 \end{pmatrix} \right $	<b>2</b> $\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 15 & -8 \\ -5 & -3 & 7 \end{pmatrix}$	<b>3</b> $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & -15 & 8 \\ -5 & 18 & -7 \end{pmatrix}$	<b>4</b> $\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	<b>5</b> $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -15 & 8 \\ -3 & 15 & -7 \end{pmatrix}$
<b>6</b> $\frac{1}{31} \begin{pmatrix} 14 & 13 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \\ -13 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	<b>7</b> $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -10 & -11 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 9 & 12 & -2 \end{pmatrix}$	<b>8</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 27 & -14 \\ 1 & -18 & 10 \end{pmatrix}$	<b>9</b> $\frac{1}{27} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 21 & -10 \\ 5 & 12 & 2 \end{pmatrix}$	<b>10</b> $\frac{1}{21} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 17 & -8 \\ 5 & 11 & 1 \end{pmatrix}$
<b>11</b> $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -12 & -12 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 11 & 14 & -2 \end{pmatrix}$	<b>12</b> $\frac{1}{23} \begin{pmatrix} 10 & 11 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \\ -9 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	<b>13</b> $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -8 & -10 & 3 \\ 2 & 9 & -4 \\ 7 & 12 & -1 \end{pmatrix}$	<b>14</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 2 & 13 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	<b>15</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 & 13 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -13 & -11 & 3 \end{pmatrix}$

<b>16</b> $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -2 & 19 & -10 \\ -1 & -10 & 8 \end{pmatrix}$	<b>17</b> $\frac{1}{39} \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 23 & -12 \\ -5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$	<b>18</b> $\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$	<b>19</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}$	<b>20</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ 1 & -10 & 6 \end{pmatrix}$
<b>21</b> $\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 18 & 15 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -17 & -6 & 4 \end{pmatrix}$	<b>22</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & 12 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -11 & -10 & 3 \end{pmatrix}$	<b>23</b> $\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -10 & -11 & 3 \\ 2 & 9 & -4 \\ 9 & 15 & -1 \end{pmatrix}$	<b>24</b> $\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 13 & -6 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix}$	<b>25</b> $\frac{1}{23} \begin{pmatrix} 20 & 16 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -19 & -6 & 4 \end{pmatrix}$
<b>26</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 19 & -10 \\ 1 & -14 & 8 \end{pmatrix}$	<b>27</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 & 11 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$	<b>28</b> $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 12 & -6 \end{pmatrix}$	<b>29</b> $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -14 & -13 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 13 & 16 & -2 \end{pmatrix}$	<b>30</b> $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 2 & 17 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

### Контрольные вопросы

Что называется минором?

Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?

Как разложить определитель по элементам столбца или строки?

Какая матрица называется невырожденной?

Транспонированная матрица.

Какая матрица называется обратной по отношению к данной?

Каков порядок вычисления обратной матрицы?

Алгоритм решения простейшего матричного уравнения

### Практическая работа № 3

по теме «Действия над комплексными числами в алгебраической форме»

**Цель:** научить выполнять действия с комплексными числами в алгебраической форме

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения

2. Задание

3. Лист А 4

4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Теоретические сведения**

**Определение.** Комплексным числом  $z$  называется выражение  $z = a + ib$ , где  $a$  и  $b$  – действительные числа,  $i$  – мнимая единица, которая определяется соотношением:  $i^2 = -1$ ;  $i = \sqrt{-1}$ .

При этом число  $a$  называется **действительной частью** числа  $z$  ( $a = \operatorname{Re} z$ ), а  $b$  – **мнимой частью** ( $b = \operatorname{Im} z$ ).

Если  $a = \operatorname{Re} z = 0$ , то число  $z$  будет чисто мнимым, если  $b = \operatorname{Im} z = 0$ , то число  $z$  будет действительным.

**Определение.** Числа  $z = a + ib$  и  $\bar{z} = a - ib$  называются **комплексно – сопряженными**.

**Определение.** Два комплексных числа  $z_1 = a_1 + ib_1$  и  $z_2 = a_2 + ib_2$  называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2;$$

**Определение.** Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

**Действия над комплексными числами в алгебраической форме.**

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.



## Сложение и вычитание

Рассмотрим два комплексных числа, заданных в общем виде  $z_1 = a_1 + ib_1$ ;

$z_2 = a_2 + ib_2$ , тогда

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2) = a \pm ib$$

Можно сформулировать правило сложения и вычитания комплексных чисел: при сложении (вычитании) комплексных чисел соответственно складываются (вычитаются) их действительные и мнимые части.

## Умножение

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = a + ib$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

(т.е. можно говорить, что перемножаются комплексные числа как многочлены, учитывая, что  $i^2 = -1$ ). Значит, чтобы перемножить два комплексных числа необходимо перемножить их как многочлены, учитывая, что  $i^2 = -1$ .

## Деление

При выполнении деления комплексных чисел пользуются искусственным приёмом: числитель и знаменатель дроби умножают на число, комплексно - сопряженное знаменателю дроби, и поступают далее так, как и при умножении комплексных чисел.

### Пример.

$$z_1 = 5 - i;$$

$$z_2 = -2 + 3i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - i}{-2 + 3i} = \frac{(5 - i) * (-2 - 3i)}{(-2 + 3i) * (-2 - 3i)} = \frac{-10 + 2i - 15i + 3i^2}{4 - 9i^2} = \frac{-13 - 13i}{13} = -1 - i$$

## Задания практической работы

1. Даны комплексные числа вычислить  $yz = z_1 + z_2$ ;  $z_1 - z_2$ ;  $z_1 \cdot z_2$ ;  $\frac{z_1}{z_2}$

1.  $z_1 = 5 - i$ ;  $z_2 = 1 + 3i$

16.  $z_1 = 5 + i$ ;  $z_2 = 1 - 2i$

2.  $z_1 = 3 - 4i$ ;  $z_2 = 1 + i$

17.  $z_1 = 3 + i$ ;  $z_2 = 5 - 2i$

3.  $z_1 = 1 - 5i$ ;  $z_2 = 1 + 4i$

18.  $z_1 = 1 - 5i$ ;  $z_2 = 1 + 3i$

4.  $z_1 = 1 + 3i$ ;  $z_2 = 7 - i$

19.  $z_1 = 5 - i$ ;  $z_2 = 1 + 3i$

5.  $z_1 = 1 - i$ ;  $z_2 = 7 + 3i$

20.  $z_1 = 1 + 3i$ ;  $z_2 = -2 + 5i$

6.  $z_1 = 1 - i$ ;  $z_2 = 5 - 4i$

21.  $z_1 = 3 + 4i$ ;  $z_2 = -2 + i$

7.  $z_1 = 3 + 4i$ ;  $z_2 = -2 + i$

22.  $z_1 = 5 - 2i$ ;  $z_2 = -2 + i$

8.  $z_1 = -i$ ;  $z_2 = 7 + 4i$

23.  $z_1 = 7 - 2i$ ;  $z_2 = 5 + 3i$

9.  $z_1 = 6 - 5i$ ;  $z_2 = 1 + i$

24.  $z_1 = 7 - 3i$ ;  $z_2 = -1 + 4i$

10.  $z_1 = -1 + 5i; \quad z_2 = 2 - 5i$

11.  $z_1 = 5 - 7i; \quad z_2 = 1 - 3i$

12.  $z_1 = -3 - 2i; \quad z_2 = -1 + 7i$

13.  $z_1 = 5 + 2i; \quad z_2 = 2 - i$

14.  $z_1 = 1 + 5i; \quad z_2 = 2 - 3i$

15.  $z_1 = 1 - 4i; \quad z_2 = 1 + 2i$

25.  $z_1 = -2 + 3i; \quad z_2 = 5 - 4i$

26.  $z_1 = -3 + 2i; \quad z_2 = 6 + 5i$

27.  $z_1 = -1 + 7i; \quad z_2 = 4 - 5i$

28.  $z_1 = 4 + 5i; \quad z_2 = 1 - 2i$

29.  $z_1 = -1 + 3i; \quad z_2 = 6 - 5i$

30.  $z_1 = -3 - 2i; \quad z_2 = 4 + 3i$

**2. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме**

1)11)21)  $\frac{1+i}{1-2i} - \left( \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i \right);$

2)12)22)  $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}};$

3)13)23)  $\left( \frac{1-i}{1+i} \right)^{20} + i^{17};$

4)14)24)  $\frac{(1-2i)(1+2i)}{2+i} - i^{12};$

5)15)25)  $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i} - (1+i\sqrt{3});$

6)16)26)  $\frac{(-2+i)^2}{1+3i} - (0,1 - 0,3i);$

7)17)27)  $\frac{2(1-i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)};$

8)18)28)  $\frac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i} - 2i^{19};$

9) 19)29)  $\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^5};$

10)20)30)  $\frac{(4-i)^2}{i^8} - 8(2-i^{13});$

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое комплексное число: действительная часть числа, мнимая часть числа?
2. Что такое мнимая единица?
3. Какие числа называются сопряженными?
4. Как представить комплексное число графически?
5. Что такое модуль числа?
6. Что такое аргумент числа?
7. Сколько может быть модулей и аргументов у комплексного числа?
8. Как найти аргумент числа?

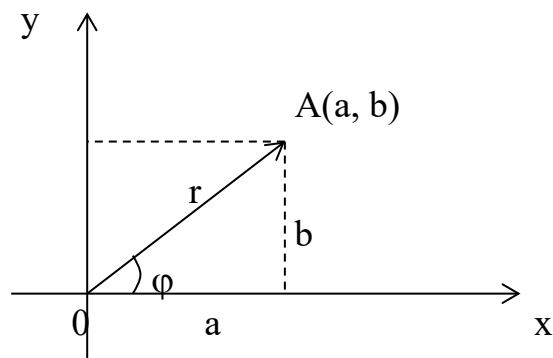
Как найти сумму, разность, произведение, частное комплексных чисел

### **Теоретические сведения**

### **Геометрическое изображение комплексных чисел.**

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси ОХ располагаются действительные числа, а на оси ОУ – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

### **Тригонометрическая форма числа.**

Из геометрических соображений видно, что  $a = r \cos \varphi$ ;  $b = r \sin \varphi$ . Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**.

При этом величина  $r$  называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона  $\varphi$  - **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \quad \text{Arg } z = -\text{Arg } \bar{z}.$$

Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

**Умножение**  $z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$\bar{z}z = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

**Деление**  $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

**Возведение в степень**

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где  $n$  – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра**. (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик).

**Извлечение корня из комплексного числа**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Отсюда:  $\rho = \sqrt[n]{r}; \quad n\psi = \varphi + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

Таким образом, корень  $n$  – ой степени из комплексного числа имеет  $n$  различных значений.

**Задания для практической работы**

**Задание.** Выполнить действия с данными комплексными :

1)  $z_1 + z_2$ ;  $z_1 - z_2$ ;  $z_1 \cdot z_2$ ,  $z_1 : z_2$

$$1. \quad z_1 = 8(\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ), \quad z_2 = 2(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ),$$

$$2. \quad z_1 = 5(\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ), \quad z_2 = 2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ),$$

3.  $z_1 = 3(\cos 70^\circ + \sin 70^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
4.  $z_1 = 10(\cos 105^\circ + \sin 105^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
5.  $z_1 = 12(\cos 145^\circ + \sin 145^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
6.  $z_1 = 7(\cos 255^\circ + \sin 255^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
7.  $z_1 = 9(\cos 168^\circ + \sin 168^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
8.  $z_1 = 6(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
9.  $z_1 = 3(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
10.  $z_1 = 10(\cos 75^\circ + \sin 75^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
11.  $z_1 = 9(\cos 123^\circ + \sin 123^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
12.  $z_1 = 5(\cos 160^\circ + \sin 160^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
13.  $z_1 = 3(\cos 235^\circ + \sin 235^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
14.  $z_1 = 4(\cos 30^\circ + \sin 30^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
15.  $z_1 = 2(\cos 258^\circ + \sin 258^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
16.  $z_1 = 7(\cos 115^\circ + \sin 115^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
17.  $z_1 = 14(\cos 310^\circ + \sin 310^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
18.  $z_1 = 8(\cos 45^\circ + \sin 45^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
19.  $z_1 = 6(\cos 213^\circ + \sin 213^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
20.  $z_1 = 9(\cos 70^\circ + \sin 70^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
21.  $z_1 = 4(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
22.  $z_1 = 6(\cos 300^\circ + \sin 300^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
23.  $z_1 = 3(\cos 33^\circ + \sin 33^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
24.  $z_1 = 5(\cos 250^\circ + \sin 250^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
25.  $z_1 = 8(\cos 85^\circ + \sin 85^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
26.  $z_1 = 10(\cos 165^\circ + \sin 165^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,
27.  $z_1 = 9(\cos 48^\circ + \sin 48^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 12^\circ + \sin 12^\circ)$ ,
28.  $z_1 = 5(\cos 100^\circ + \sin 100^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$ ,
29.  $z_1 = 4(\cos 175^\circ + \sin 175^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)$ ,
30.  $z_1 = 16(\cos 120^\circ + \sin 120^\circ)$ ,  $z_2 = 2(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$ ,

2. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме, результат записать в тригонометрической, алгебраической и показательной форме

$$1,11,21. \frac{i-1}{1+i}$$

$$6,16,26. \sqrt[3]{-1+i}$$

$$2,12,22. \left( \frac{1-i}{-2-2i} \right)^{-6}$$

$$7,17,27. ((\sqrt{3}-i)(-1+i))^4$$

$$3,13,23. \left( \frac{1+\sqrt{3}i}{1-i} \right)^6$$

$$8,18,28. \left( \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)^{12}$$

$$4,14,24. \left( \frac{0,5-0,5\sqrt{3}i}{0,5\sqrt{3}-0,5i} \right)^4$$

$$9,19,29. \left( \frac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i} \right)^3$$

$$5,15,25. (2+\sqrt{12}i)^5$$

$$10,20,30. (-3-\sqrt{3}i)^3$$

3. Записать комплексное число в тригонометрической и алгебраической форме

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| 1. $14e^{2\pi i/3};$     | 6. $4e^{-\pi i/4};$     |
| 2. $2e^{\pi i/6};$       | 7. $5e^{-7\pi i/6};$    |
| 3. $(2/3)e^{-5\pi i/3};$ | 8. $(2/5)e^{5\pi i/4};$ |
| 4. $3e^{\pi i/3};$       | 9. $8e^{7\pi i/6};$     |
| 5. $e^{-5\pi i/6};$      | 10. $2,2e^{-3\pi i/4};$ |

4. Выполнить действия. Результат записать во всех формах.

- |   |                              |
|---|------------------------------|
| 1. $\frac{(5+3i)(5+3i^{15})}{\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)};$ | 6. $((-\sqrt{3}+i)/2)^{60};$ |
| 2. $\frac{(3+2i)^2(2-3i^0)}{1+2i^{31}};$                                    | 7. $(2/(1-i\sqrt{3}));$      |
| 3. $\frac{(2+i)^3}{2i(\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4))};$                     | 8. $((\sqrt{3}+i)/2)^{24};$  |
| 4. $((1-i\sqrt{3})/2)^6;$   | 9. $\sqrt{-8-8\sqrt{3}i};$   |
| 5. $\sqrt{-1+i\sqrt{3}};$   | 10. $\sqrt{7-4i\sqrt{2}};$   |

5.. Выполнить действия, используя тригонометрическую форму:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{i\sqrt{6}}{6}\right);$ | 6. $3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right] + (3 + \sqrt{3}i);$ |
| 2. $(1+i\sqrt{3})(-2-2i\sqrt{3});$  | 7. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}};$  |
| 3. $(1+i)(3+3i\sqrt{3});$   | 8. $\frac{i^6 + i^5}{\sqrt{2}e^{\pi i/3}};$   |
| 4. $(6+2i\sqrt{3})(-3-3i);$   | 9. $\frac{\frac{-3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}{4-4\sqrt{3}i};$  |
| 5. $(5+5i)(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ);$   | 10. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-3\pi i/4}$                                  |

6. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\sqrt[3]{z_1};$                                       | 2) $z_2^5;$  |
| 1. $z_1 = 1+i, z_2 = -\sqrt{3}+i;$                        | 6. $z_1 = 1-\sqrt{3}i, z_2 = 2+2i;$                              |
| 2. $z_1 = 1-i, z_2 = -\sqrt{3}-i;$                        | 7. $z_1 = -1+\sqrt{3}i, z_2 = -2-2i;$                            |
| 3. $z_1 = -1+i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$ | 8. $z_1 = -1-\sqrt{3}i, z_2 = -2+2i;$                            |
| 4. $z_1 = -1-i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$ | 9. $z_1 = \sqrt{3}+i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$ |

5.  $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = 2 - 2i;$

10.  $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое тригонометрическая форма записи комплексного числа?
2. Как перевести число в тригонометрическую форму?
3. Как найти произведение, частное чисел в тригонометрической форме?
4. Как найти возвести число в тригонометрической форме в целую степень?
5. Как найти корень n-ной степени из числа в тригонометрической форме?
6. Формула Эйлера
7. Как представить комплексное число в показательной форме?
8. Как связаны тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел?
9. Как найти произведение, частное чисел в показательной форме?
10. Как найти возвести число в показательной форме в целую степень?
11. Как найти корень n-ной степени из числа в показательной форме?

## Практическая работа № 4

по теме «Решение уравнений на множестве комплексных чисел»

**Цель:** научить решать уравнения на множестве комплексных чисел

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Теоретические сведения**

**Квадратное уравнение с комплексными корнями**

$$z = \sqrt{-4}$$

Нельзя извлечь корень? Если речь идет о действительных числах, то действительно нельзя. В комплексных числах извлечь корень – можно! А точнее, два корня:

$$z_1 = \sqrt{-4} = -2i$$

$$z_2 = \sqrt{-4} = 2i$$

Действительно ли найденные корни являются решением уравнения  $z^2 = -4$ ?  
Выполним проверку:

$$(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$$

$$(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$$

Что и требовалось проверить.

Часто используется сокращенная запись, оба корня записывают в одну строчку под  $z_{1,2} = \pm 2i$ .

Такие корни также называют *сопряженными комплексными корнями*.

Как извлекать квадратные корни из отрицательных чисел, думаю, всем понятно:  $\sqrt{-1} = \pm i$ ,  $\sqrt{-9} = \pm 3i$ ,  $\sqrt{-36} = \pm 6i$ ,  $\sqrt{-3} = \pm \sqrt{3}i$ ,  $\sqrt{-5} = \pm \sqrt{5}i$  и т.д. Во всех случаях получается два сопряженных комплексных корня.

**Пример**

Решить квадратное уравнение  $z^2 - 6z + 34 = 0$

Вычислим дискриминант:

$$D = 36 - 136 = -100$$



Дискриминант отрицателен, и в действительных числах уравнение решения не имеет. Но корень можно извлечь в комплексных числах!

$$\sqrt{D} = \pm 10i$$

По известным формулам получаем два корня:

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$$

$$z_{1,2} = 3 \pm 5i \text{ — сопряженные комплексные корни}$$

Таким образом, уравнение  $z^2 - 6z + 34 = 0$  имеет два сопряженных комплексных корня:  $z_1 = 3 - 5i$ ,  $z_2 = 3 + 5i$

Нетрудно понять, что в *поле* комплексных чисел «школьное» квадратное уравнение всегда при двух корнях! И вообще, любое уравнение вида  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$  имеет ровно  $n$  комплексных корней, часть которых (или все) могут быть действительными.

### Задания практической работы

Решить квадратное уравнение:

I.  $x^2 - 2x + 17 = 0$

2.  $2x^2 + 2x + 1 = 0$

3.  $4x^2 - 4x + 17 = 0$

4.  $x^2 + 6x + 25 = 0$

5.  $4x^2 - 20x + 29 = 0$

6.  $9x^2 - 6x + 2 = 0$

7.  $x^2 - 4x + 29 = 0$

8.  $2x^2 - 2x + 5 = 0$

9.  $4x^2 + 4x + 5 = 0$

10.  $x^2 - 4x + 13 = 0$

II.  $9x^2 - 6x + 17 = 0$

12.  $4x^2 - 12x + 25 = 0$

13.  $x^2 + 4x + 5 = 0$

14.  $2x^2 - 10x + 17 = 0$

15.  $x^2 - 6x + 13 = 0$

16.  $x^2 + 6x + 18 = 0$

17.  $x^2 - 4x + 40 = 0$

18.  $4x^2 - 12x + 13 = 0$

19.  $2x^2 + 6x + 5 = 0$

20.  $x^2 - 2x + 5 = 0$

21.  $9x^2 - 6x + 10 = 0$

22.  $2x^2 + 6x + 5 = 0$

23.  $x^2 + 6x + 13 = 0$

24.  $2x^2 - 6x + 17 = 0$

25.  $9x^2 - 6x + 2 = 0$

26.  $x^2 - 6x + 10 = 0$

27.  $x^2 + 2x + 26 = 0$

28.  $2x^2 + 6x + 9 = 0$

$$29. 2x^2 + 10x + 13 = 0$$

$$30. x^2 - 6x + 34 = 0$$

### **Контрольные вопросы**

1. Какие числа называются комплексно сопряженными?
2. Какие комплексные числа называются равными?
3. Как извлечь квадратный корень из комплексного числа?

## Практическая работа № 5

по теме «Нахождение производной сложной функции. Геометрический и физический смысл производной»

**Цель:** научиться находить производные элементарных и сложных функций.

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения

2. Задание

3. Лист А 4

4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

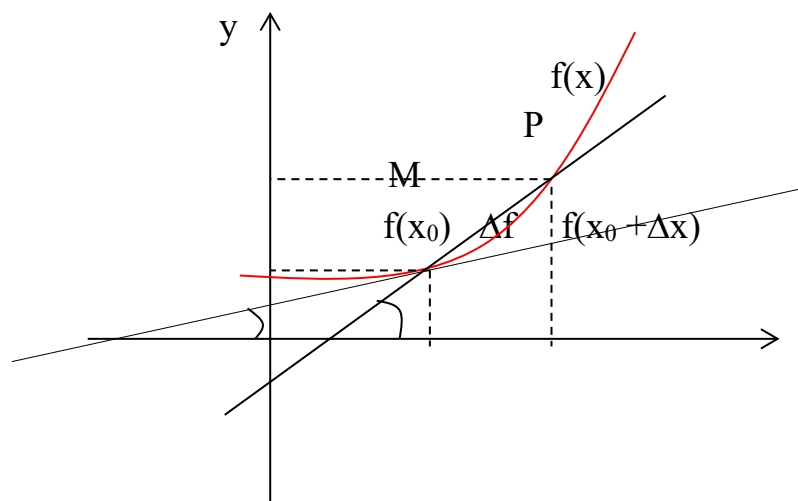
**Ход работы**

**Краткие теоретические сведения.**

*Производная функции, ее геометрический и физический смысл.*

**Определение.** Производной функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$  называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть  $f(x)$  определена на некотором промежутке  $(a, b)$ . Тогда  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$  — тангенс угла наклона секущей  $MP$  к графику функции.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$  — геометрический смысл производной

где  $\alpha$  — угол наклона касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $(x_0, f(x_0))$ .

К –угловой коэффициент касательной.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой-либо точке.

**Уравнение касательной к кривой**  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

**Уравнение нормали к кривой**  $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ .

Фактически производная функции показывает как изменяется функция при изменении переменной.

**Физический смысл производной функции  $f(t)$** , где  $t$ - время, а  $f(t)$ - закон движения (изменения координат) – **мгновенная скорость**

**движения.** Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. **ускорение**.

**Основные правила дифференцирования.**

Обозначим  $f(x) = u$ ,  $g(x) = v$ - функции, дифференцируемые в точке  $x$ .

1)  $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2)  $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ , если  $v \neq 0$

### **Производные основных элементарных функций.**

1)  $C' = 0$ ;

2)  $(x^m)' = mx^{m-1}$ ;

3)  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4)  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5)  $(e^x)' = e^x$

6)  $(a^x)' = a^x \ln a$

7)  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

9)  $(\sin x)' = \cos x$

10)  $(\cos x)' = -\sin x$

11)  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12)  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14)  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15)  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

16)  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

### **Производная сложной функции.**

Пусть  $y = f(x)$ ;  $u = g(x)$ , причем область значений функции  $u$  входит в область определения функции  $f$ .

Тогда  $y' = f'(u) \cdot u'$

### **Логарифмическое дифференцирование.**

Рассмотрим функцию  $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при } x < 0 \end{cases}$ .

Тогда  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ , т.к.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ;  $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$ .

Учитывая полученный результат, можно записать  $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ .

Отношение  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  называется **логарифмической производной** функции  $f(x)$ .

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

### ***Производная показательно-степенной функции.***

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть  $u = f(x)$  ( $f(x) > 0$ ) и  $v = g(x)$  – функции, имеющие производные в точке  $x$ .

Найдем производную функции  $y = u^v$ . Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v \left( v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)$$

$$(u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u$$

**Пример.** Найти производную функции  $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$ .

По полученной выше формуле получаем:  $u = x^2 + 3x$ ;  $v = x \cos x$ ;

Производные этих функций:  $u' = 2x + 3$ ;  $v' = \cos x - x \sin x$ ;

Окончательно:

$$f'(x) = x \cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln(x^2 + 3x)$$

**Пример.** Найти производную функции  $y = \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x$ . Сначала

преобразуем данную функцию:  $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x$

$y' = \frac{1}{2} 2 \cos 2x + \frac{1}{2} 2 \cos x (-\sin x) = \cos 2x - \sin x \cos x$ . **Пример.** Найти производную

функции  $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}$ .

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2 + 1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4 + 1 + x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

### Задание 1. Найти производные функций

**B1**  $Y = x^5 - 5x^2 + 11$ ,  $Y = x^2 \operatorname{ctgx}$

$$Y = \frac{\operatorname{arctgx}}{x}, Y = \sqrt[3]{x^3 + 5}$$

$$Y = e^{-x^2} \ln x, Y = (\cos x - 1)^{2x}$$

**B2**  $Y = 2x^3 - x^2 + 1$ ,  $Y = x^5 \operatorname{tgx}$

$$Y = \frac{\operatorname{artgx}}{4x}, Y = \sqrt[3]{x^2 - 3}$$

$$Y = \ln \frac{x}{x+1}, Y = (\sin x - 2)^{3x}$$

**B3**  $Y = 7x^3 + 3x^2 - 2$ ,  $Y = x \operatorname{arctgx}$

$$Y = \frac{x+5}{\ln x}, Y = \frac{1}{(2x+11)^5}$$

$$Y = \sin^3(4x^2 + \frac{x}{2} - 1)$$

$$Y = (5x + 4)^{4x}$$

**B4**  $Y = -3x^3 + 5x^4 - 81$ ,  $Y = 2x \sin x$

$$Y = \frac{x}{\sin x}, Y = \sqrt[4]{x^2 - 3}$$

$$Y = \cos \frac{x}{x+1}, Y = (\operatorname{tgx} - 3)^{3x}$$

**B5**  $Y = 7x^6 - 3x^2 + 32$

$$Y = x^3 \arcsin x$$

$$Y = \frac{2}{(3-6x)^6}, Y = \frac{\cos x}{3x}$$

$$Y = \ln(x - x^2 - 6)$$

$$Y = (\cos x + 4)^x$$

**B6**  $Y = -x^5 + 3x^3 - 11$ ,  $Y = 3x^2 \operatorname{ctgx}$

$$Y = \frac{\operatorname{arccosx}}{3x}, Y = \sqrt[5]{x^2 - 3}$$

$$Y = e^{3x^2} \ln 2x$$

**B16**  $Y = x^5 - 5x^2 + 1$ ,  $Y = x^2 \operatorname{ctgx}$

$$Y = \frac{\operatorname{arctgx}}{x}, Y = \sqrt[3]{x^3 + 5}$$

$$Y = e^{-x^2} \ln x, Y = (x - 1)^{2x}$$

**B17**  $Y = 2x^3 - x^2 + 17$ ,  $Y = x^5 \operatorname{tgx}$

$$Y = \frac{\operatorname{artgx}}{4x}, Y = \sqrt[3]{x^2 - 3}$$

$$Y = \ln \frac{x}{x+1}, Y = (\ln x + 8)^{2x}$$

**B18**  $Y = 7x^3 + 3x^2 - 2$ ,  $Y = x \operatorname{arctgx}$

$$Y = \frac{x+5}{\ln x}, Y = \frac{1}{(2x+11)^5}$$

$$Y = \sin^3(4x^2 + \frac{x}{2} - 1)$$

$$Y = (\ln x - 2)^{2x}$$

**B19**  $Y = -3x^3 + 5x^4 - 81$ ,  $Y = 2x \sin x$

$$Y = \frac{x}{\sin x}, Y = \sqrt[4]{x^2 - 3}$$

$$Y = \cos \frac{x}{x+1}, Y = (\ln x + 9)^{5x}$$

**B20**  $Y = 7x^6 -$

$$3x^2 + 3, Y = x^3 \arcsin x$$

$$Y = \frac{2}{(3-6x)^6}, Y = \frac{\cos x}{3x}$$

$$Y = \ln(x - x^2 - 6)$$

$$Y = (\operatorname{tgx} + 2)^x$$

**B21**  $Y = -x^5 + 3x^3 - 11$ ,  $Y = 3x^2 \operatorname{ctgx}$

$$Y = \frac{\operatorname{arccosx}}{3x}, Y = \sqrt[5]{x^2 - 3}$$

$$Y = e^{3x^2} \ln 2x$$

$$Y=(7x+6)^{2x}$$

**B7**  $Y=3x^4-6x^2+19, Y=x^3\sin x$   
 $Y=\frac{tgx}{3x}, Y=\sqrt[3]{2x^3-6}$   
 $Y=e^{-x^2}\ln x, Y=(3x+1)^{9x}$

**B8**  $Y=-4X^6+9X^2-12, Y=x^3\operatorname{tg}x$   
 $Y=\frac{\operatorname{arcc}tgx}{6x}, Y=\sqrt[3]{3x+6}$   
 $Y=2^{-x^2}\ln x, Y=(\sin x - 4)^x$

**B9**  $Y=5x^4-2x^3+65, Y=x^2\arcsin x$   
 $Y=\frac{5}{(6x-4)^3}, Y=\sqrt[5]{x^2-5}$   
 $Y=3^{2x^2}\ln, Y=(\cos x + 1)^{2x}$

**B10**  $Y=-2x^6-3x^2+19, Y=x^2\operatorname{ctg}x$   
 $Y=\frac{\operatorname{ar}ctgx}{x}, Y=\sqrt[3]{x^3+5}$   
 $Y=e^{2x^2}\ln x, Y=(3x-1)^x$

**B11**  $Y=8x^4-6X^5+1, Y=2x^3\arccos x$   
 $Y=\frac{tgx}{5x}, Y=\frac{9}{(6x-5)^4}$   
 $Y=4^{-x^2}\ln x, Y=(9x+3)^{4x}$

**B12**  $Y=3X^2+11x^3-87, Y=3x^3\operatorname{ctg}x$   
 $Y=\frac{\cos x}{2x}, Y=\frac{-3}{(4x+9)^5}$   
 $Y=5^{6x^2}\ln x, Y=(\cos x - 2)^{3x}$

**B13**  $Y=x^5+9X^2-51, Y=x^2\arcsin x$   
 $Y=\frac{x}{\cos x}, Y=\sqrt[4]{8x^3-3}$   
 $Y=e^{2x^2}\ln x, Y=(8x-2)^x$

**B14**  $Y=3x^7-9X^3+11, Y=5x^3\operatorname{tg}x$

$$Y=(tgx-6)^{2x}$$

**B22**  $Y=3x^4-6x^2+1, Y=x^3\sin x$   
 $Y=\frac{tgx}{3x}, Y=\sqrt[3]{2x^3-6}$   
 $Y=e^{-x^2}\ln x, Y=(tgx+3)^{5x}$

**B23**  $Y=-4X^6+9X^2-12, Y=x^3\operatorname{tg}x$   
 $Y=\frac{\operatorname{ar}ctgx}{6x}, Y=\sqrt[3]{3x+6}$   
 $Y=2^{-x^2}\ln x, Y=(\cos x + 3)^{6x}$

**B24**  $Y=5x^4-2x^3+65, Y=x^2\arcsin x$   
 $Y=\frac{5}{(6x-4)^3}, Y=\sqrt[5]{x^2-5}$   
 $Y=3^{2x^2}\ln x, Y=(\sin x + 2)^{8x}$

**B25**  $Y=-2x^6-3x^2+1, Y=x^2\operatorname{ctg}x$   
 $Y=\frac{\operatorname{ar}ctgx}{x}, Y=\sqrt[3]{x^3+5}$   
 $Y=e^{2x^2}\ln x, Y=(\sin x - 1)^{3x}$

**B26**  $Y=8x^4-6X^5+1, Y=2x^3\arccos x$   
 $Y=\frac{tgx}{5x}, Y=\frac{9}{(6x-5)^4}$   
 $Y=4^{-x^2}\ln x, Y=(\sin x + 5)^{4x}$

**B27**  $Y=3X^2+11x^3-87, Y=3x^3\operatorname{ctg}x$   
 $Y=\frac{\cos x}{2x}, Y=\frac{-3}{(4x+9)^5}$   
 $Y=5^{6x^2}\ln x, Y=(\sin x - 2)^{2x}$

**B28**  $Y=x^5+9X^2-51, Y=x^2\arcsin x$   
 $Y=\frac{x}{\cos x}, Y=\sqrt[4]{8x^3-3}$   
 $Y=e^{2x^2}\ln x, Y=(\cos x + 6)^{6x}$

**B29**  $Y=3x^7-9X^3+11, Y=5x^3\operatorname{tg}x$

$$Y = \frac{2x}{\arcsin x}, Y = \sqrt[5]{2x^4 - 6}$$

$$Y = e^{3x^3} \ln x, Y = (tg x - 3)^{2x}$$

$$\mathbf{B15} \quad Y = x^5 - 8x^2 + 16, Y = 4x^2 \operatorname{ctg} x$$

$$Y = \frac{\operatorname{actg} x}{3x}, Y = \frac{9}{(2x-15)^6}$$

$$Y = 6^{2x^2} \ln x, Y = (\ln x + 2)^{6x}$$

$$Y = \frac{2x}{\arcsin x}, Y = \sqrt[5]{2x^4 - 6}$$

$$Y = e^{3x^3} \ln x, Y = (\sin x + 2)^{3x}$$

$$\mathbf{B30} \quad Y = x^5 - 8x^2 + 16, Y = 4x^2 \operatorname{ctg} x$$

$$Y = \frac{\operatorname{actg} x}{3x}, Y = \frac{9}{(2x-15)^6}$$

$$Y = 6^{2x^2} \ln x, Y = (\sin x - 6)^{6x}$$

2. Найти производные функции.

**а – порядковый номер в журнале**

$$1. y = ax^a - \frac{a}{x^a} + \sqrt[a]{x^{a+6}} - ax + a \quad 2. y = \sqrt[2a]{(ax^2 - 3ax + 5)^3} - \frac{a}{(x+a)^{a-4}}$$

$$3. y = tg^a(x+a) \cdot \arccos ax^2 \quad 4. y = \arcsin^a ax \cdot \log_a(x-a)$$

$$5. y = a^{-x^4} \cdot \operatorname{ctg} ax^3 \quad 6. y = \operatorname{ctg}^2 ax \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x^a}$$

$$7. y = \frac{\sqrt{ax^2 - 3ax + 5a}}{e^{-x^6}} \quad 8. y = \frac{\lg(ax^2 - 2ax + 3a)}{\operatorname{arctg}^2 ax}$$

### Контрольные вопросы

1. Сформулировать определение производной, правила дифференцирования.
2. Знать таблицу производных элементарных функций.
3. Сформулировать правило нахождения производной сложной функции.

### Теоретические сведения

#### Ход работы

#### Определение функции двух переменных

Если каждой паре  $(x; y)$  значений двух независимых друг от друга переменных величин  $x$  и  $y$  из некоторого множества  $D$  соответствует единственное значение величины, то говорят, что  $z$  есть функция двух независимых переменных  $x$  и  $y$ , определенная на множестве  $D$ .

Обозначается:  $z = f(x; y)$  или  $z = z(x; y)$ .

Например,  $S = ab$ ,  $S = S(a; b)$  - функции двух переменных;  $V = abc$ ,  $V = V(a, b, c)$  - функция трех переменных;

#### Способы задания функций нескольких переменных

Чтобы задать функцию двух (трех) переменных, нужно указать способ, с помощью которого для каждой пары (тройки) значений аргументов можно найти соответствующее значение функции. Наиболее часто функция задается аналитически - это явное задание функции или неявное задание

#### Частные производные первого порядка

Пусть функция двух переменных  $z = f(x, y)$  определена в некоторой окрестности точки  $M(x, y)$  евклидова пространства  $E_2$ . Частная производная функции  $z = f(x, y)$  по аргументу  $x$  является обыкновенной производной функции одной переменной  $x$  при фиксированном значении переменной  $y$  и обозначается как



$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z'_x, f'_x.$$

Аналогичным образом определяется частная производная функции  $f(x, y)$  по переменной  $y$  в точке  $M$ , обозначаемая как

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z'_y, f'_y.$$

Функция, имеющая частные производные, называется дифференцируемой. Совершенно аналогично определяются частные производные функций трех и более переменных. Частная производная функции нескольких переменных характеризует скорость ее изменения по данной координате при фиксированных значениях других координат.

**Пример:**  $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$  — функция двух переменных.

Иногда используют запись  $f(x, y) = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ . Также встречаются задания, где вместо буквы  $z$  используется буква  $u$ .

**Найти частные производные первого и второго порядка функции  $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$**

Сначала найдем частные производные первого порядка. Их две.

**Обозначения:**

$z'_x$  или  $\frac{\partial z}{\partial x}$  — частная производная по «икс»  
 $z'_y$  или  $\frac{\partial z}{\partial y}$  — частная производная по «игрек»

Начнем с  $z'_x$ . **Когда мы находим частную производную по «икс», то переменная  $y$  считается константой (постоянным числом).**

$$\begin{aligned} z'_x &= (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x = 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x = \\ &= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 = 4xy^3 + 12x^3 \end{aligned}$$

Комментарии к выполненным действиям:

(1) Первое, что мы делаем при нахождении частной производной — заключаем **всю** функцию в скобки под штрих с **подстрочным индексом**.

(2) Используем правила дифференцирования  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ,  $(Cu)' = Cu'$ . Для простого примера, как этот, оба правила вполне можно применить на одном шаге. Обратите внимание на первое слагаемое: так как  $y$  **считается константой, а любую константу можно вынести за знак производной**, то  $y^3$  мы выносим за скобки. То есть в данной ситуации  $y^3$  ничем не лучше обычного числа. Теперь посмотрим на третье слагаемое  $5y$ : здесь, наоборот, выносить нечего. Так как  $y$  константа, то  $5y$  — тоже константа, и в этом смысле она ничем не лучше последнего слагаемого — «семерки».

(3) Используем табличные производные  $(C)' = 0$  и  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .

(4) Теперь  $z'_y$ . **Когда мы находим частную производную по «игрек», то переменная  $x$  считается константой (постоянным числом).**

$$z'_y = (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y \stackrel{(1)}{=} 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y \stackrel{(2)}{=} \\ = 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5$$

(1) Используем те же правила дифференцирования  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ,  $(Cu)' = Cu'$ . В первом слагаемом выносим константу  $x^2$  за знак производной, во втором слагаемом ничего вынести нельзя поскольку  $3x^4$  – уже константа.

(2) Используем таблицу производным элементарных функций. **Мысленно поменяем в таблице все «иксы» на «игреки».** В частности, используемые нами формулы выглядят так:  $(C)' = 0$  и  $(y^n)' = ny^{n-1}$ . Итак, частные производные первого порядка найдены

Подведем итог, чем же отличается нахождение частных производных от нахождения «обычных» производных функции одной переменной:

1) Когда мы находим частную производную  $z'_x$ , переменная  $y$  считается константой.

2) Когда мы находим частную производную  $z'_y$ , переменная  $x$  считается константой.

3) Правила и таблица производных элементарных функций справедливы и применимы для любой переменной ( $x$ ,  $y$  либо какой-нибудь другой), по которой ведется дифференцирование.

Шаг второй. Находим частные производные второго порядка. Их четыре.

**Обозначения:**

$z''_{xx}$	или	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$	–	вторая	производная	по	«икс»
$z''_{yy}$	или	$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$	–	вторая	производная	по	«игрек»
$z''_{xy}$	или	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$	–	смешанная	производная	«икс по игрек»	
$z''_{yx}$	или	$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$	–	смешанная	производная	«игрек по икс»	

В понятии второй производной нет ничего сложного. Говоря простым языком, **вторая производная – это производная от первой производной.**

Частные производные первого порядка:  
 $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$   
 $z'_y = 6x^2y^2 + 5$

Сначала найдем смешанные производные:  
 $z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$

Как видите, всё просто: берем частную производную  $z'_x$  и дифференцируем ее еще раз, но в данном случае – уже по «игрек».

Аналогично:  
 $z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$

**В практических примерах можно ориентироваться на следующее равенство:**

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

Таким образом, через смешанные производные второго порядка очень удобно проверить, а правильно ли мы нашли частные производные первого порядка.

Находим вторую производную по «икс».

Никаких изобретений, берем  $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$  и дифференцируем её по «икс» еще раз:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4xy^3 + 12x^3)'_x = 4y^3(x)'_x + 12(x^3)'_x = 4y^3 \cdot 1 + 12 \cdot 3x^2 = 4y^3 + 36x^2$$

Аналогично:

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 + 5)'_y = 6x^2(y^2)'_y + (5)'_y = 6x^2 \cdot 2y + 0 = 12x^2y$$

Следует отметить, что при нахождении  $z''_{xx}$ ,  $z''_{yy}$  нужно проявить повышенное внимание, так как никаких чудесных равенств для их проверки не существует.

Примеры нахождения частных производных первого порядка.

**Пример 1.**  $z = x^2 - 2xy + 2y^2$ .

Решение. Дифференцируем функцию  $z = f(x, y)$  сначала по  $x$ , полагая  $y$  фиксированной величиной, потом повторяем эту же процедуру, меняя роли  $x$  и  $y$ . Получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 2x.$$

**Пример 2.**  $z = \arctg xy$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1 + (xy)^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1 + (xy)^2}$ .

**Пример 3.**  $u = ye^{yz} + \ln(x^2 - 2y + z)$ .

Решение. Частные производные этой функции трех переменных выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2 - 2y + z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (1 + yz)e^{yz} - \frac{2}{x^2 - 2y + z}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= y^2 e^{yz} + \frac{1}{x^2 - 2y + z}. \end{aligned}$$

### Задания практической работы

1. Найти и построить область определения сложной функции.
2. Вычислить производную сложной функции.

**B1** 1.  $z = \arcsin(1 - x^2 - y^2)$

2.a)  $z = \sqrt{\ln x} \frac{y}{x}$ ,  $x = e$ ,  $y = 1$

б)  $u = x^2 - y^2 + 3z^2$ ,

$x = 1/2, y = 1/2, z = 1/2$

**B2** 1.  $z = \ln(y - \ln x)$

2.a)  $z = \sqrt{xy} \ln \frac{y}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2$

**B16** 1.  $z = \ln \frac{x}{y}$

2.a)  $z = (x^2 + y^2)^{x^2 - y^2}$

б)  $u = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x}$ ,  $x = 1, y = 1, z = -2$

**B17** 1.  $z = \ln y - \ln \cos x$

2.a)  $z = x \sin y + x^2$ ,  $x = 3, y = \pi/2$

$$\text{B)} u = 3x^2/2 - y^2/2 + 2z^2, x=2/3, y=2, z=2/3$$

$$\text{B3 } 1. z = \sqrt{\ln x + \ln y}$$

$$2.a) z = x^y \frac{1}{xy}, x=e, y=1$$

$$\text{б)} u = x^3/2 - y^3/2 + 8z^3, x=2, y=2, z=3/2$$

$$\text{B4 } 1. z = \sqrt{\sqrt{y} - x + 2}$$

$$2.a) z = \sin 1/x e^y, x=\pi/2, y=1$$

$$\text{б)} u = 3/2x^2 + 3y^2 - 2z^2,$$

$$x=2, y=1/3, z=3/2$$

$$\text{B5 } 1. z = \arcsin \frac{x^2}{y}$$

$$2.a) z = \arccos(x^2 - y^2) + 1/\sqrt{xy}$$

$$\text{б)} u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x+\sqrt{y}}$$

$$\text{B6 } 1. z = \arccos(2x - y)$$

$$2.a) z = \arccos \frac{y}{x} + e^{\sqrt{xy}}, x=2, y=1$$

$$\text{б)} u = \sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2,$$

$$x=1, y=2/3, z=1/\sqrt{6}$$

$$\text{B7 } 1. Z = \sqrt{\ln(2 - x - y)},$$

$$2.a) z = \operatorname{tg} 1/x \cdot e^{\frac{y}{x}}, x=1/\pi, y=0$$

$$\text{б)} u = 2\sqrt{x+y} + y \cdot \operatorname{arctg} z,$$

$$x=1, y=1/3, z=1/\sqrt{6}$$

$$\text{B8 } 1. z = \ln \frac{x}{y}$$

$$2.a) z = (x^2 + y^2)^{x^2 - y^2}$$

$$\text{б)} u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}, x=1, y=1, z=-2$$

$$\text{B9 } 1. z = \ln y - \ln \cos x$$

$$2.a) z = x \sin y + x^2, x=3, y=\pi/2$$

$$\text{б)} u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}, x=1, y=1, z=0$$

$$\text{B10 } 1. z = \ln \sin x - \sqrt{y}$$

$$2.a) z = \arcsin \frac{u}{v} - \ln v, u=0, v=1$$

$$\text{б)} u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}, x=0, y=-3, z=4$$

$$\text{б)} u = \sqrt{xy} -$$

$$\sqrt{4 - z^2}, x=1, y=1, z=0$$

$$\text{B18 } 1. z = \ln \sin x - \sqrt{y}$$

$$2.a) z = \arcsin \frac{u}{v} - \ln v, u=0, v=1$$

$$\text{б)} u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}, x=0, y=-3, z=4$$

$$\text{B19 } 1. z = \ln(y^2/4 - x^2/9 - 1)$$

$$2.a) z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 1/y, x=y=1/\sqrt{2}$$

$$\text{б)} u = 2/x + 3/2y -$$

$$\sqrt{6/4z}, x=2/3, y=3/2, z=1/2$$

$$\text{B20 } 1. z = \arcsin \frac{y}{x}$$

$$2.a) z = \ln y \sqrt{x}, x=1, y=3/5$$

$$\text{б)} u = 3/x + 4/y -$$

$$1/\sqrt{6}x, x=1, y=2, z=1/\sqrt{6}$$

$$\text{B21 } 1. z = 1 + \sqrt{1 - (x - y)^2}$$

$$2.a) z = \cos(1/y) - 1/\sqrt{xy}, x=\pi/2, y=2/\pi$$

$$\text{б)} u = x\sqrt{y} - yz^2, x=2, y=1, z=-1$$

$$\text{B22 } 1. z = \ln(x^2 + y)$$

$$2.a) z = e^{x^2} \sqrt{x^2 - y^2}, x=1, y=0$$

$$\text{б)} u = \sin \frac{y}{xz}, x=2, y=\pi, z=1$$

$$\text{B23 } 1. z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$$

$$2.a) z = y \ln(x^2 - y^2), x=2, y=1$$

$$\text{б)} u = x^3/16 + y^2/9 - z^2/8, x=2, y=1/2, z=1/3$$

$$\text{B24 } 1. Z = \sqrt{\ln(2 - x - y)},$$

$$2.a) z = \operatorname{tg} 1/x \cdot e^{\frac{y}{x}}, x=1/\pi, y=0$$

$$\text{б)} u = 2\sqrt{x+y} + y \cdot \operatorname{arctg} z,$$

$$x=1, y=1/3, z=1/\sqrt{6}$$

$$\text{B25 } 1. z = \arccos(2x - y)$$

$$2.a) z = \arccos \frac{y}{x} + e^{\sqrt{xy}}, x=2, y=1$$

**B11.** 1.  $z = \ln(y^2/4 - x^2/9 - 1)$

2.a)  $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 1/y, x=y=1/\sqrt{2}$

б)  $u = 2/x + 3/2y -$

$\sqrt{6/4z}, x=2/3, y=3/2, z=1/2$

**B12.** 1.  $z = \arcsin \frac{y}{x}$

2.a)  $z = \ln y \sqrt{x}, x=1, y=3/5$

б)  $u = 3/x + 4/y -$

$1/\sqrt{6x}, x=1, y=2, z=1/\sqrt{6}$

**B13.** 1.  $z = 1 + \sqrt{1 - (x - y)^2}$

2.a)  $z = \cos(1/y) - 1/\sqrt{xy}, x=\pi/2, y=2/\pi$

б)  $u = x\sqrt{y} - yz^2, x=2, y=1, z=-1$

**B14.** 1.  $z = \ln(x^2 + y)$

2.a)  $z = e^{x^2} \sqrt{x^2 - y^2}, x=1, y=0$

б)  $u = \sin \frac{y}{xz}, x=2, y=\pi, z=1$

**B15.** 1.  $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

2.  $z = y \ln(x^2 - y^2), x=2, y=1$

$u = x^3/16 + y^2/9 - z^2/8, x=2, y=1/2, z=1/3$

б)  $u = \sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2,$

$x=1, y=2/3, z=1/\sqrt{6}$

**B26** 1.  $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$

2.a)  $z = \operatorname{arctg}(x^2 - y^2) + 1/\sqrt{xy}$

б)  $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}$

**B27** 1.  $z = \sqrt{\sqrt{y} - x + 2}$

2.a)  $z = \sin 1/x e^y, x=\pi/2, y=1$

б)  $u = 3/2x^2 + 3y^2 - 2z^2,$

$x=2, y=1/3, z=3/2$

**B28** 1.  $z = \sqrt{\ln x + \ln y}$

2.a)  $z = x^y \frac{1}{xy}, x=e, y=1$

б)  $u = x^3/2 -$

$y^3/2 + 8z^3, x=2, y=2, z=3/2$

**B29**  $z = \ln(y - \ln x)$

2.a)  $z = \sqrt{xy} \ln \frac{y}{x}, x=1, y=2$

б)  $u = 3x^2/2 -$

$y^2/2 + 2z^2, x=2/3, y=2, z=2/3$

**B30** 1.  $z = \arcsin(1 - x^2 - y^2)$

2.a)  $z = \sqrt{\ln x} \frac{y}{x}, x=e, y=1$

б)  $u = x^2 - y^2 + 3z^2,$

$x=1/2, y=1/2, z=1/2$

### Контрольные вопросы:

1. Сформулировать определение функции с двумя переменными.
2. Что называется областью определения функции нескольких переменных?
3. Сформулировать правило нахождения производной функции нескольких переменных.
4. Что такое полный дифференциал функции нескольких переменных?

## Практическая работа № 6

### по теме «Исследования функции и построение графика»

**Цель:** научиться исследовать функцию и по результатам исследования строить график.

**Время выполнения** 90 минут

#### **Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

#### **Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

#### **Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

#### **Теоретические сведения.**

##### *Схема исследования функций*

- 1) Область существования функции.  
Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.
- 2) Точки разрыва. (Если они имеются).
- 3) Интервалы возрастания и убывания.
- 4) Точки максимума и минимума.
- 5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
- 6) Области выпуклости и вогнутости.
- 7) Точки перегиба. (Если они имеются).
- 8) Асимптоты. (Если они имеются).
- 9) Построение графика.

**Пример.** Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ .

В свою очередь, видно, что прямые  $x = 1$ ,  $x = -1$  являются *вертикальными асимптотами* кривой.

*Областью значений* данной функции является интервал  $(-\infty; \infty)$ .

*Точками разрыва* функции являются точки  $x = 1$ ,  $x = -1$ .

Находим *критические точки*.

$$\text{Найдем производную функции } y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Критические точки:  $x = 0$ ;  $x = -\sqrt{3}$ ;  $x = \sqrt{3}$ ;  $x = -1$ ;  $x = 1$ .

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$ ,  $y' > 0$ , функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$-1 < x < 0$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$0 < x < 1$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$ ,  $y' > 0$ , функция возрастает

Видно, что точка  $x = -\sqrt{3}$  является точкой *максимума*, а точка  $x = \sqrt{3}$  является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно  $3\sqrt{3}/2$  и  $-3\sqrt{3}/2$ .

Найдем вторую производную функции

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$ ,  $y'' < 0$ , кривая выпуклая  $-\sqrt{3} < x < -1$ ,

$y'' < 0$ , кривая выпуклая

$-1 < x < 0$ ,  $y'' > 0$ , кривая вогнутая  $0 < x < 1$ ,

$y'' < 0$ , кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$ ,  $y'' > 0$ , кривая вогнутая  $\sqrt{3} < x < \infty$ ,

$y'' > 0$ , кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$ ,  $y' > 0$ , функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$-1 < x < 0$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$0 < x < 1$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$ ,  $y' < 0$ , функция убывает

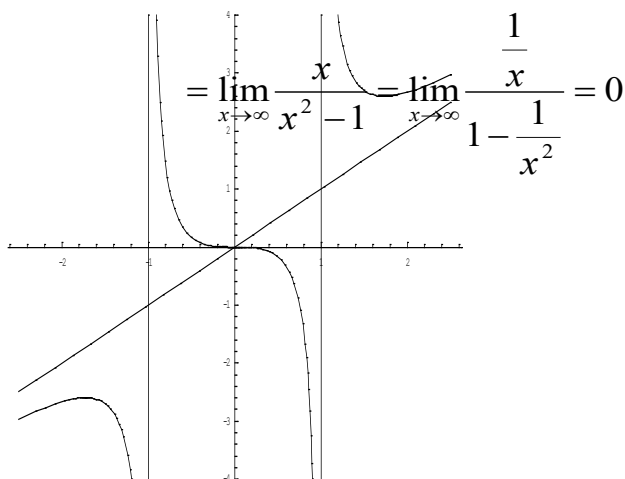
$\sqrt{3} < x < \infty$ ,  $y' > 0$ , функция возрастает

Видно, что точка  $x = -\sqrt{3}$  является точкой *максимума*, а точка  $x = \sqrt{3}$  является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно  $3\sqrt{3}/2$  и  $-3\sqrt{3}/2$ .

Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$ ;

Итого,

Строим  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) =$  уравнение наклонной асимптоты –  $y = x$ .  
график функции:



**Задание 1.** Исследовать функцию по предложенной схеме и построить ее график:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать на четность и нечетность.
3. Исследовать на периодичность.
4. Найти стационарные и критические точки первого рода.
5. Найти промежутки возрастания и убывания функции, экстремум.
6. Найти стационарные и критические точки второго рода.
7. Найти промежутки выпуклости функции, точки перегиба.
8. Найти асимптоты (вертикальные, горизонтальные, наклонные).
9. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
10. Найти дополнительные точки.
11. По результатам исследования построить график функции.

B1. а)  $y = x^2(2-x)^2$ ; б)  $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x+1}$

B16. а)  $y = x^3 - 12x^2 - 9x + 1$ ;

б)  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

B2. а)  $y = x\sqrt{1-x}$ ;

б)  $y = \frac{x^2 + 2x - 8}{x+3}$

B17. а)  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$ ; б)  $y = \frac{x^2}{x-2}$

B3. а)  $y = x - \arctg x$ ;

б)  $y = \frac{x^2 - 3x - 10}{x-1}$

B18. а)  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$ ; б)  $y = \frac{x^2}{x^2 - 3}$



$$B4. a) y = \frac{8}{4-x^2};$$

$$б) y = \frac{x^2+3x-10}{x+3}$$

$$B19. a) y = -x^3 + 3x^2 + 9x;$$

$$б) y = \frac{x^2-1}{3x+5}$$

$$B5. a) y = \sqrt{\frac{1-x}{x}};$$

$$B20. a) y = x^5 - 20x; \quad б) y = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$б) y = \frac{x^2-4x-12}{x+3}$$

$$B6. a) y = \frac{x^2}{1+x^2};$$

$$б) y = \frac{x^2+4x-12}{x-3}$$

$$B21. a) y = x^3 + 15x^2 - x - 250 \quad б) y = \frac{x^2-1}{x}$$

$$B7. a) y = \frac{x}{x^2+16};$$

$$б) y = \frac{x^2-x-20}{x+2}$$

$$B22. a) y = \sqrt[3]{x+2}; \quad б) y = \frac{x}{x^2+9}$$

$$B8. a) y = e^{\frac{x^2}{4}};$$

$$б) y = \frac{x^2+x-20}{x-2}$$

$$B23. a) y = x^2 - 4x; \quad б) y = 3x + \frac{3}{x} + 5$$

$$B9. a) y = \frac{x}{x+1};$$

$$б) y = \frac{x^2-2x-15}{x+4}$$

$$B24. a) y = 3x - x^3; \quad б) y = \frac{x^2-2x-8}{x+1}$$

$$B10. a) y = 2x - x^2;$$

$$б) y = \frac{x^2+2x-15}{x-1}$$

$$B25. a) y = 2/3x^3 - 2x = 1; \quad б) y = -\frac{x}{x^2+9}$$

$$B11. a) y = x^3 - 3x^2 + 4; \quad б) y = \frac{5-2x}{x^2-4}$$

$$B26. a) y = 2x^2 - x^4; \quad б) y = \frac{1-x^2}{x}$$

$$B12. a) y = -x^3 + 3x^2 - 2;$$

$$б) y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$B27. a) y = 2x^2 - 8; \quad б) y = \frac{x}{x^2-1}$$

$$B13. a) y = x^3 - 12x + 6; \quad б) y = \frac{x}{x^2+4}$$

$$B28. a) y = x^4 - 8x^2 + 3; \quad б) y = \frac{1}{x^2-1}$$

$$B14. a) y = x^3 + 9x^2 + 24x + 12$$

$$б) y = \frac{x^2}{6x^3 + 18}$$

$$B29. a) y = \frac{3}{4-x^2}; \quad б) y = \frac{x^2+3x-10}{x+3}$$

$$B15. a) y = -x^3 + 3x^2 - 2;$$

$$б) y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$B30. a) y = x\sqrt{4-x}; \quad б) y = \frac{x^2-2x-8}{x+3}$$

### Контрольные вопросы:

1. Что такое область определения функции?
2. Какие функции называются четными, нечетными, общего вида?
3. Виды точек разрыва.
4. Что такое нули функции?
5. Как определить промежутки выпуклости?

## 6.Виды асимптот.

## Практическая работа № 7

### по теме «Вычисление площадей плоских фигур»

**Цель:** проверить умение вычислять площади с помощью определенных интегралов

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения

2. Задание

3. Лист А 4

4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

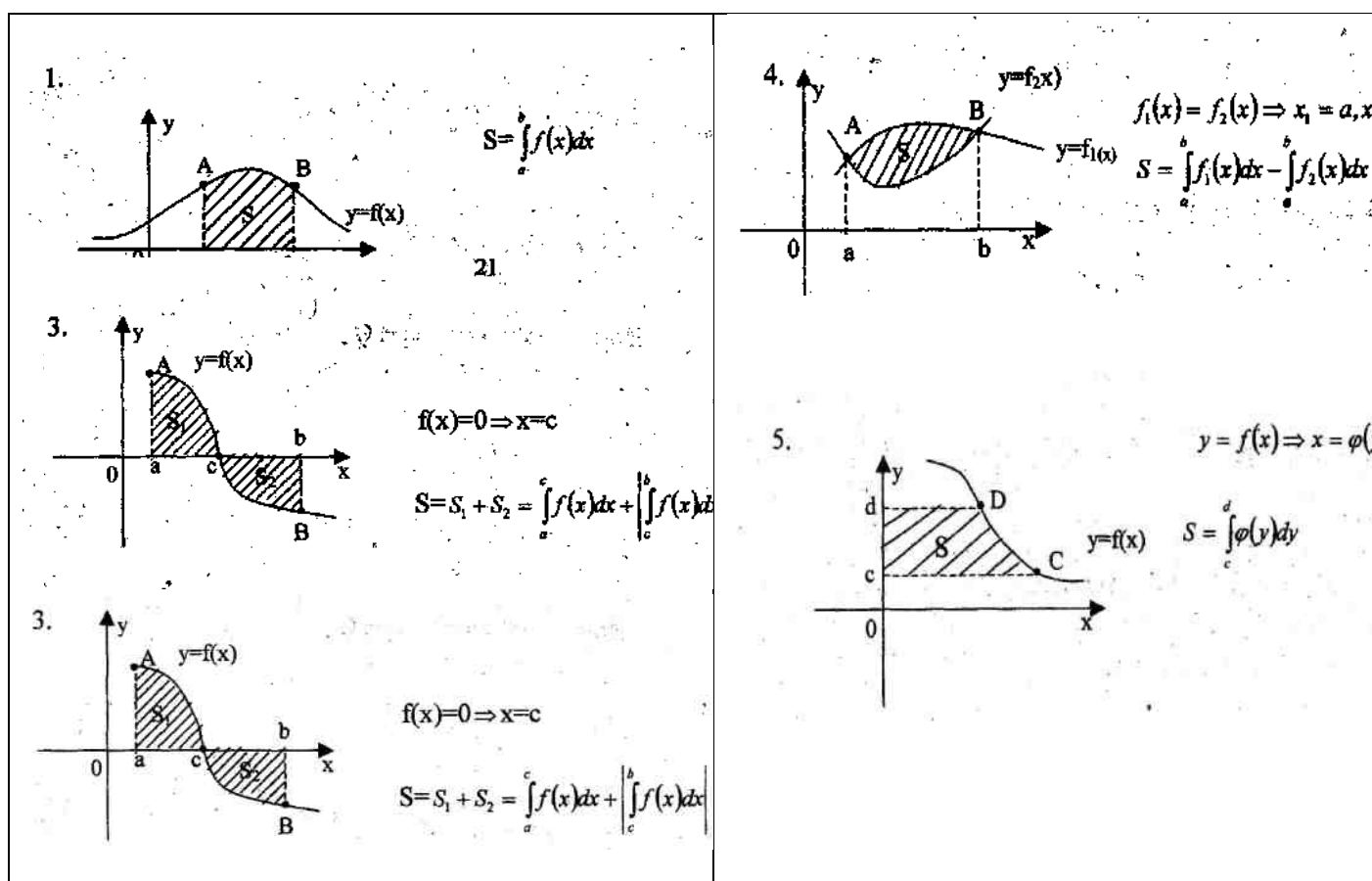
4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

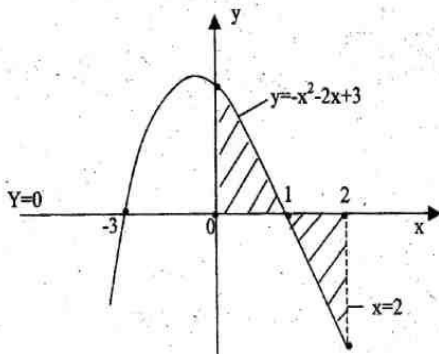
Теоретические сведения

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой  $y=f(x)$ , двумя прямыми  $x=a$  и  $x=b$  и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:



**Пример 4:** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = -x^2 - 2x + 3$ , осями координат и прямой  $x=2$ .

Решение: Построим данные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ох:  $y = -x^2 - 2x + 3$ ,  
 $-x^2 - 2x + 3 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3$

$$S = \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3) dx - \int_1^2 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left( -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 + \left( -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{3} - 1 + 3 - \left( -\frac{8}{3} - 4 + 6 \right) + \left( -\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{12}{3} = 4 \text{ (кв.ед.)}$$

**Задания практической работы** Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

Задание 1

- 1,11,21.  $y = 8x - x^2 - 7$  и осью ОХ
- 2,12,22.  $y = x^3 - 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$
- 3,13,23.  $y = x^2 - 3x - 4$  и осью ОХ
- 4,14,24.  $y^2 = 4x$  и  $x^2 = 4y$
- 5,15,25.  $y = 5x - x^2 + 6$  и осью ОХ
- 6,16,26.  $y = x^3$ ,  $y = x^2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$
- 7,17,27.  $y = x^2 - 6x + 8$  и осью ОХ
- 8,18,28.  $y = x^2$  и  $y = x + 2$
- 9,19,29.  $y = x^2 - 4x - 5$  и осью ОХ
- 10,20,30.  $y = 6x - 3x^2$  и осью ОХ

Задание 2

- 1,11,21.  $y = x^2 + 2$  и  $y = 2x + 2$
- 2,12,22.  $y = x^2$  и  $y = 2 - x^2$
- 3,13,23.  $xy = 6$  и  $y + x - 7 = 0$
- 4,14,24.  $y = 2^x$ ,  $y = 2x - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$

$$5,15,25. \ y = \ln x, \ x = e, \ y = 0$$

$$6,16,26. \ y = \frac{4}{x^2}, \ x = 1, \ y = x - 1$$

$$7,17,27. \ y = x^2 + x, \ y = 1 - x^2, \ x = 0, \ x = 1 \quad 8,18,28. \ y = x^3, \ x = 2$$

$$9,19,29. \ y = \cos x, \ x = 0, \ x = 2\pi, \ y = 0 \quad 10,20,30. \ y = \sqrt{x}, \ y = 2, \ x = 0 \text{ Задание 3}$$

$$1,11,21. \ x - y + 3 = 0, \ x + y - 1 = 0, \ y = 0$$

$$2,12,22. \ 2x - 3y + 6 = 0, \ y = 0 \text{ и } x = 3$$

$$3,13,23. \ y = x^2 - 2x + 3 \text{ и } y = 3x - 1$$

$$4,14,24. \ x - y + 2 = 0, \ y = 0, \ x = -1, \ x = 2$$

$$5,15,25. \ y^2 = 4x, \ x = 1 \text{ и осью } OX$$

$$6,16,36. \ y = x^2 \text{ и } y = -3x$$

$$7,17,37. \ x - y + 3 = 0, \ x + y - 1 = 0, \ y = 0$$

$$8,18,28. \ x^2 = 3y \text{ и } y = x$$

$$9,19,29. \ x - y - 2 = 0, \ x + y + 1 = 0, \ y = 0$$

$$10,20,30. \ y^2 = 9x, \ x = 3 \text{ и осью } OX$$

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое криволинейная трапеция?

2. Формула Ньютона-Лейбница

3. Графики элементарных функций.

4. Различные виды плоских фигур и способы вычисления их площадей.

## Практическая работа № 8

по теме «Решение практических задач с применением интегралов»

**Цель:** проверить умение находить неопределенные и определенные интегралы используя методы непосредственного интегрирования, интегрирование подстановкой и по частям.

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Ход работы**

**Теоретические сведения**

Определение Пусть  $f(x)$  -- функция, заданная на объединении интервалов вещественной оси. Набор всех первообразных для  $f(x)$  называется *неопределённым интегралом* от  $f(x)$  и обозначается  $\int f(x) dx$ . Операция нахождения неопределённого интеграла по заданной функции  $f(x)$  называется *интегрированием* этой функции; найти неопределённый интеграл означает *проинтегрировать* данную функцию. Функция  $f(x)$ , записанная после знака интеграла (или, как часто говорят, *под* знаком интеграла), называется *подынтегральной функцией*. Согласно доказанным выше теоремам о виде первообразных, неопределённый интеграл от функции  $f(x)$  состоит из функций вида  $F(x) + C$ , где  $F(x)$  -- какая-либо фиксированная первообразная для  $f(x)$ , а  $C$  -- величина, постоянная на каждом из непересекающихся интервалов, на которых задана функция  $f(x)$ . Поэтому можно написать такую формулу:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

### Таблица интегралов элементарных функций

1	$\int 0 \cdot dx = C$	11	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
2	$\int 1 \cdot dx = x + C$	12	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
3	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$	13	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
4	$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$	14	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ $\int e^x dx = e^x + C$	15	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	17	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right  + C$
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	18	$\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln \left  x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right $
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	19	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
10	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$	20	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right  + C;$ $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{x + \pi/2}{2} \right  + C$

**Замена переменной в неопределённом интеграле (интегрирование подстановкой).**

Пусть  $\int f(x) dx = F(x) + C$ . Тогда  $\int f(t(x))t'(x) dx = F(t(x)) + C$ . Здесь  $t(x)$  - дифференцируемая монотонная функция.

При решении задач замену переменной можно выполнить двумя способами.

1. Если в подынтегральной функции удаётся сразу заметить оба сомножителя, и  $f(t(x))$ , и  $t'(x)$ , то замена переменной осуществляется подведением множителя  $t'(x)$  под знак дифференциала:  $t'(x)dx = dt$ , и задача сводится к вычислению интеграла  $\int f(t)dt$ . Например,

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\int \frac{dt}{t},$$

где  $t = \cos x$   $= -\ln |\cos x| + C$  (аналогично находится интеграл от  $\operatorname{ctg} x$ );

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d \sin x = \int e^t dt, \text{ где } t = \sin x$$

$$= e^{\sin x} + C.$$

В более сложных задачах операция подведения под знак дифференциала может выполняться несколько раз:

$$\int e^{\operatorname{arccotg}^5 x^2} \operatorname{arccotg}^4 x^2 \frac{x}{1+x^4} dx =$$

(самое неприятное в подынтегральной функции - пятая степень арккотангенса под знаком экспоненты; если дальше не найдётся дифференциал этой функции, то интеграл, возможно, взять вообще не удастся; в то же время следующий множитель  $(\operatorname{arccotg}^4 x^2)$  - производная (с точностью до постоянного множителя) степенной функции; затем следуют производные (опять с точностью до постоянных множителей) функций  $\operatorname{arccotg} x^2$  и  $x^2$  по своим аргументам)

$$= \frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arccotg}^5 x^2} \operatorname{arccotg}^4 x^2 \frac{1}{1+x^4} (2x dx) = \frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arccotg}^5 x^2} \operatorname{arccotg}^4 x^2 \frac{1}{1+x^4} dx^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arccotg}^5 x^2} \operatorname{arccotg}^4 x^2 \left( \frac{-dx^2}{1+x^4} \right) = -\frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arccotg}^5 x^2} \operatorname{arccotg}^4 x^2 d \operatorname{arccotg} x^2 =$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot 5} \int e^{\operatorname{arccotg}^5 x^2} (5 \operatorname{arccotg}^4 x^2 d \operatorname{arccotg} x^2) = -\frac{1}{10} \int e^{\operatorname{arccotg}^5 x^2} (d \operatorname{arccotg}^5 x^2) = -\frac{1}{10} e^{\operatorname{arccotg}^5 x^2} + C$$

2. Замену переменной можно осуществлять формальным сведением подынтегрального выражения к новой переменной. Так, в  $\int e^{\sin x} \cos x dx$  имеет смысл перейти к переменной (сделать подстановку)  $t = \sin x$ . Выражаем все множители подынтегрального выражения через переменную  $t$ :

$$x = \arcsin t, dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}; \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$$

; в результате  $\int e^{\sin x} \cos x dx =$

$$= \int e^t \sqrt{1-t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t dt = e^t + C =$$

(возвращаемся к исходной переменной)

$$= e^{\sin x} + C.$$

Другие примеры:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})}.$$

Подынтегральная функция содержит два множителя, ни один из которых не является производной другого, поэтому подводить их под знак дифференциала бесполезно. Попытаемся ввести новую переменную, такую,



чтобы корни извлекались:  $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})} = \left| \begin{array}{l} x-5=t^6; t=\sqrt[6]{x-5}; \\ x=t^6+5; dx=6t^5 dt \end{array} \right| =$

$$\int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 6 \int \frac{(t^2+1-1)dt}{t^2+1} =$$

$$= 6 \left( \int dt - \int \frac{dt}{t^2+1} \right) = 6(t - \arctg t) + C = 6(\sqrt[6]{x-5} - \arctg \sqrt[6]{x-5}) + C$$

Рассмотрим

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  (интеграл №19 из табл.). Здесь подынтегральная функция состоит из единственного множителя; можно опять попытаться сделать такую замену переменной, чтобы корень извлекался. Структура подкоренного выражения подсказывает эту замену:  $x = a \sin t$  (или  $x = a \cos t$ ,  $a > 0$ ):

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t, dx = a \cos t dt, \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cos t \end{array} \right| = a^2 \int \cos^2 t \cdot dt$$

. Интеграл свёлся к

интегралу от квадрата косинуса. При интегрировании чётных степеней синуса и косинуса часто применяются формулы, выражающие  $\sin^2 t$  и  $\cos^2 t$  через

косинус двойного угла:  $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ ;  $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ . Поэтому

$$a^2 \int \cos^2 t \cdot dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} (\int dt + \int \cos 2t dt) = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \int \cos 2t \cdot d2t \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C = \left| \begin{array}{l} \sin t = \frac{x}{a}; \cos t = \\ \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

Примеры: 1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \left| \begin{array}{l} t = x + \sqrt{x^2 + a}; t - x = \sqrt{x^2 + a}; (t - x)^2 = x^2 + a; \\ t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + a; x = \frac{t^2 - a}{2t}; \sqrt{x^2 + a} = t - \frac{t^2 - a}{2t} \\ = \frac{t^2 + a}{2t}; dx = \frac{t^2 + a}{2t^2} dt \end{array} \right| = \ln |t| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{2a}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{(x+a) - (x-a)}{(x+a)(x-a)} dx = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

### Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям - приём, который применяется почти так же часто, как и замена переменной. Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  - функции, имеющие непрерывные частные производные. Тогда по формуле дифференцирования произведения  $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du \Rightarrow u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du$ . Находим неопределённые интегралы для обеих частей этого равенства (при этом  $\int d(uv) = uv + C$ ):

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du.$$

Эта формула и называется формулой интегрирования по частям. Часто ее записывают в производных ( $dv = v' \cdot dx$ ,  $du = u' \cdot dx$ ):

$$\int u \cdot v' dx = uv - \int v \cdot u' dx.$$

Примеры:

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; dv = \sin x dx; \\ du = dx; v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x; dv = dx; \\ du = \frac{dx}{x}; v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Формула интегрирования по частям может применяться неоднократно. При наличии небольшого опыта в простых интегралах нет необходимости выписывать промежуточные выкладки ( $u = \dots$ ,  $dv = \dots$ ), можно сразу применять формулу, представив интеграл в виде  $\int u \cdot dv$ :

$$\begin{aligned} \int e^x x^3 dx &= \int x^3 (e^x dx) = \int x^3 de^x = x^3 e^x - \int e^x dx^3 = x^3 e^x - \int e^x 3x^2 dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 (e^x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3 \int x^2 de^x = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - \int e^x dx^2) = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - \int e^x 2x dx) = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x de^x = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(xe^x - \int e^x dx) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6 \int e^x dx = \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + C = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C. \end{aligned}$$

Приведённые примеры показывают, для каких функций надо применять (или попытаться применить) формулу интегрирования по частям:

Интегралы вида  $\int P_n(x) \cdot \cos ax \cdot dx$ ,  $\int P_n(x) \cdot \sin ax \cdot dx$ ,  $\int P_n(x) \cdot a^x \cdot dx$ , где  $P_n(x)$  - многочлен  $n$ -ой степени. Так, для  $\int P_n(x) \cdot \cos ax \cdot dx$  имеем  $u = P_n(x)$ ,  $dv = \cos ax dx$ ,  $du = (P_n(x))' dx = P_{n-1}(x) dx$ ,  $v = (\sin ax) / a$ , и

$$\int P_n(x) \cdot \cos ax \cdot dx = P_n(x) \cdot (\sin ax) / a - 1/a \int P_{n-1}(x) \cdot \sin ax \cdot dx.$$

В результате мы получили интеграл того же типа с многочленом степени на единицу меньше. После  $n$ -кратного применения формулы степень многочлена уменьшится до

нуля, т.е. многочлен превратится в постоянную, и интеграл сведётся к табличному.

Интегралы  $\int P_n(x) \cdot f(x) \cdot dx$ , где  $f(x)$  - трансцендентная функция, имеющая дробно-рациональную или дробно-иррациональную производную ( $\ln x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arcsctg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ). В этом случае имеет смысл взять  $u = f(x)$ ,  $dv = P_n(x)dx$ , для того, чтобы в интеграле  $\int v du$  участвовала не  $f(x)$ , а её производная. Пример:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \arcsin x \cdot dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x; dv = x dx; \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2 dx}{2\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \sin t; dx = \cos t dt \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \sin^2 t dt = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2t) dt = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{t}{4} + \frac{\sin t \cos t}{4} + C = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C. \end{aligned}$$

Для некоторых функций применяется приём “сведения интеграла к самому себе”. С помощью интегрирования по частям (возможно, неоднократного) интеграл выражается через такой же интеграл; в результате получается уравнение относительно этого интеграла, решая которое, находим значение интеграла. Примеры:

Найти  $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  (это интеграл №19 из табл. 10.3. неопределённых интегралов; в предыдущем параграфе мы вычислили этот интеграл с помощью тригонометрической подстановки  $x = a \sin t$ ).

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2}; dv = dx; \\ du = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; v = x \end{array} \right| = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

В результате для искомого интеграла мы получили уравнение  $I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$ ,

решая которое, получаем  $2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C$  (константа  $C$  появилась вследствие того, что интегралы  $I$  в правой и левой частях уравнения определены

с точностью до произвольной постоянной) и  $I = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$

(константа  $\frac{C}{2}$  переобозначена через  $C$ ).

Сведение интеграла к самому себе – самый простой способ нахождения часто встречающихся интегралов вида  $\int e^{ax} \cos bx dx$  и  $\int e^{ax} \sin bx dx$  ( $a, b = \text{const}$ ). Например,

$$\begin{aligned} I = \int e^{ax} \cos bx \cdot dx &= \left| \begin{array}{l} u = \cos bx; dv = e^{ax} dx \\ du = -b \sin bx dx; v = e^{ax} / a \end{array} \right| = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \cdot dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \sin bx; dv = e^{ax} dx \\ du = b \cos bx dx; v = e^{ax} / a \end{array} \right| = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \left( \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \cdot dx \right) = \\ &= \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I \end{aligned}$$

Итак, после двукратного интегрирования по частям получено уравнение относительно  $I$ :

$$I = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I, \text{ решение}$$

которого

При нахождении этих интегралов не принципиально, положим ли мы  $u = \cos bx$ ,  $dv = e^{ax} dx$  или  $u = e^{ax}$ ,  $dv = \cos bx dx$ ; важно только при втором применении формулы интегрирования по частям загонять под знак дифференциала функцию того же типа, что и при первом (показательную или тригонометрическую).

Ещё один вид формул, которые обычно получаются с помощью интегрирования по частям, и используются для нахождения интегралов – **рекуррентные соотношения**. Если подынтегральная функция зависит от некоторого параметра  $n$ , и получено соотношение, которое выражает интеграл через аналогичный интеграл с меньшим значением  $n$ , то это соотношение и называется рекуррентным соотношением. Примеры:

$I_n = \int \cos^n x \cdot dx$ . Представим подынтегральную функцию в виде  $\cos^n x = \cos^{n-2} x \cdot \cos^2 x = \cos^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) = \cos^{n-2} x - \sin x \cos^{n-2} x \sin x$ ; интеграл от первого слагаемого аналогичен исходному с значением параметра  $n$  на две единицы меньше; к интегралу от второго слагаемого применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_n = \int \cos^n x \cdot dx &= \int \cos^{n-2} x \cdot dx - \int \sin x \cos^{n-2} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x; dv = \cos^{n-2} x \sin x dx; \\ du = \cos x dx; v = -\frac{\cos^{n-1} x}{n-1}; \end{array} \right| = \\ &= I_{n-2} - \sin x \left( -\frac{\cos^{n-1} x}{n-1} \right) + \int \left( -\frac{\cos^{n-1} x}{n-1} \right) \cos x \cdot dx = I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} \int \cos x^n \cdot dx = \\ &= I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n \Rightarrow \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right) I_n = I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} \end{aligned}$$

Теперь, зная  $I_1 = \int \cos x \cdot dx = \sin x + C$ ,

$$I_2 = \int \cos^2 x \cdot dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C,$$

мы можем выписать

$$I_3 = \int \cos^3 x \cdot dx = \frac{3-1}{3} I_1 + \frac{\sin x \cos^{3-1} x}{3} = \frac{2}{3} \sin x + \frac{\sin x \cos^2 x}{3} + C;$$

$$I_4 = \int \cos^4 x \cdot dx = \frac{4-1}{4} I_2 + \frac{\sin x \cos^{4-1} x}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} (2x + \sin 2x) + \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + C;$$

$$I_5 = \int \cos^5 x \cdot dx = \frac{5-1}{5} I_3 + \frac{\sin x \cos^{5-1} x}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} (2 \sin x + \sin x \cos^2 x) + \frac{\sin x \cos^4 x}{5} + C$$

и т.д.

**Задания практической работы** Найти неопределённые интегралы

### 1.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1.1. $\int x^3(3x+1)^2 dx$   | 1.11. $\int 4x^2(4x+2)^2 dx$  | 1.21. $\int 3\sqrt{x}(2-3x)^2 dx$   |
| 1.2. $\int -2\sqrt{x}(4-3x)^2 dx$  | 1.12. $\int \frac{x^2 - 3x^3 + 2x^7}{x} dx$                                   | 1.22. $\int \frac{2x^3 + 3x^4 - 5x^6}{x^2} dx$                                |
| 1.3. $\int \frac{4x^3 + x^4 - 8x^5}{x^3} dx$                                 | 1.13. $\int \frac{7x^4 - 4x^4 + 6x^4}{x^2} dx$                                | 1.23. $\int \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{7}} - x^{\frac{1}{2}}}{x} dx$ |
| 1.4. $\int \frac{x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{1}{3}}}{x} dx$ | 1.14. $\int \frac{x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{2}{3}}}{x} dx$ | 1.24. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^5} - \sqrt{x}}{x} dx$            |
| 1.5. $\int \frac{\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x}}{x} dx$           | 1.15. $\int \frac{3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x} dx$            | 1.25. $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx$  |
| 1.6. $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx$  | 1.16. $\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} dx$                                       | 1.26. $\int \frac{3}{\sqrt{x^2+4}} dx$  |
| 1.7. $\int \frac{3}{1+x^2} dx$   | 1.17. $\int \frac{5}{25+x^2} dx$  | 1.27. $\int \frac{2}{2+3x^2} dx$  |
| 1.8. $\int \left( e^x + 2x - 4^x + 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx;$             | 1.18. $\int \left( \frac{2}{x} + 8e^x + 5^x - x^{\frac{2}{3}} \right) dx;$    | 1.28. $\int \frac{2\sin^3 x + 3}{\sin^2 x} dx$                                |
| 1.9. $\int \frac{2\cos^3 x + 5}{\cos^2 x} dx$                                | 1.19. $\int \frac{2\cos^2 x - 4}{\cos^2 x} dx$                                | 1.29. $\int \frac{1+3\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$                                  |
| 1.10. $\int \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2} - 6 \cos x dx$                         | 1.20. $\int \frac{1}{2} \sin x + \sqrt[4]{x^7} dx$                            | 1.30. $\int (1-x)(2-\sqrt{x}) dx$   |

### 2.

- |  |   |                                  |
|--|---|----------------------------------|
| 2.1. $\int \frac{\sqrt{3}}{9x^2-3} dx$ | 2.11. $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+3}} dx$ | 2.21. $\int \frac{1}{3x^2-2} dx$ |
| 2.2. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+3}} dx$ | 2.12. $\int \frac{1}{\sqrt{4-7x^2}} dx$ | 2.22. $\int \frac{1}{4x^2+3} dx$ |

2.3. $\int \frac{1}{9x^2 + 3} dx$	2.13. $\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3-4x^2}} dx$	2.23. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 3}} dx$
2.4. $\int \frac{9}{\sqrt{9x^2 - 3}} dx$	2.14. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 9}} dx$	2.24. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}} dx$
2.5. $\int \frac{1}{\sqrt{3-9x^2}} dx$	2.15. $\int \frac{1}{2x^2 + 7} dx$	2.25. $\int \frac{1}{4x^2 - 3} dx$
2.6. $\int \frac{1}{7x^2 - 4} dx$	2.16. $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 1}} dx$	2.26. $\int \frac{2}{4 + 3x^2} dx$
2.7. $\int \frac{3}{\sqrt{7x^2 - 4}} dx$	2.17. $\int \frac{1}{3x^2 + 2} dx$	2.27. $\int \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 3}} dx$
2.8. $\int \frac{1}{5x^2 + 3} dx$	2.18. $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-2x^2}} dx$	2.28. $\int \frac{1}{4x^2 + 7} dx$
2.9. $\int \frac{1}{5x^2 - 3} dx$	2.19. $\int \frac{\sqrt{14}}{2x^2 - 7} dx$	2.29. $\int \frac{1}{8x^2 - 9} dx$
2.10. $\int \frac{1}{\sqrt{3-5x^2}} dx$	2.20. $\int \frac{1}{8x^2 + 9} dx$	2.30. $\int \frac{1}{\sqrt{9-8x^2}} dx$

### 3.

3.1. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$	3.11. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$	3.21. $\int \frac{\ln^7(x-7)}{(x-7)} dx$
3.2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}}$	3.12. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(1+x)}}{(1+x)} dx$	3.22. $\int \frac{\ln^5(x-8)}{(x-8)} dx$
3.3. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$	3.13. $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{(2x-1)} dx$	3.23. $\int \frac{\ln^6(x+9)}{(x+9)} dx$
3.4. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{(1-x)} dx$	3.14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$	3.24. $\int \frac{\ln(3x+5)}{(3x+5)} dx$
3.5. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(1+x)}}{(1+x)} dx$	3.15. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(6+x)}}{(6+x)} dx$	3.25. $\int \frac{\ln^4(3x+1)}{(3x+1)} dx$
3.6. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(1+x)}}{(1+x)} dx$	3.16. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{(x+4)} dx$	3.26. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$
3.7. $\int \frac{\sqrt{\ln^5(1+x)}}{(1+x)} dx$	3.17. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}$	3.27. $\int \frac{dx}{(x-3)\ln^4(x-3)}$
3.8. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(1+3x)}}{(1+3x)} dx$	3.18. $\int \frac{\sqrt{\ln^7(1+x)}}{(1+x)} dx$	3.28. $\int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}$
3.9. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(3+x)}}{(3+x)} dx$	3.19. $\int \frac{\ln^3(1-x)}{(1-x)} dx$	3.29. $\int \frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}$

$$3.10. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{(x-5)} dx$$

$$3.20. \int \frac{\ln^3(x-5)}{(x-5)} dx$$

$$3.30. \int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}$$

#### 4

$$4.1. \int \sin^4 2x \cdot \cos 2x dx$$

$$4.11. \int \frac{\cos x}{\sqrt{(\sin x - 4)^3}} dx$$

$$4.21. \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$$

$$4.2. \int \cos^7 2x \cdot \sin 2x dx$$

$$4.12. \int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}} dx$$

$$4.22. \int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x} dx$$

$$4.3. \int \sin^3 4x \cdot \cos 4x dx$$

$$4.13. \int \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \sin 2x dx$$

$$4.23. \int \sqrt{\cos^3 2x} \cdot \sin 2x dx$$

$$4.4. \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx$$

$$4.14. \int \sin^3 5x \cdot \cos 5x dx$$

$$4.24. \int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x} dx$$

$$4.5. \int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx$$

$$4.15. \int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}} dx$$

$$4.25. \int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}} dx$$

$$4.6. \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$$

$$4.16. \int \sqrt{\cos 7x} \cdot \sin 7x dx$$

$$4.26. \int \sin^6 3x \cdot \cos 3x dx$$

$$4.7. \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$$

$$4.17. \int \sqrt{\cos^3 2x} \cdot \sin 2x dx$$

$$4.27. \int \sin^4 8x \cdot \cos 8x dx$$

$$4.8. \int \frac{\cos x}{3 - \sin x} dx$$

$$4.18. \int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx$$

$$4.28. \int \sin^5 4x \cdot \cos 4x dx$$

$$4.9. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 3}} dx$$

$$4.19. \int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}} dx$$

$$4.29. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}} dx$$

$$4.10. \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x + 1}} dx$$

$$4.20. \int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx$$

$$4.30. \int \frac{\cos 6x}{\sqrt{\sin^3 6x}} dx$$

#### 5.

$$5.1. \int \frac{\sqrt{\arctg^6 3x}}{1 + 9x^2} dx$$

$$5.11. \int \frac{\arctg^7 3x}{1 + 9x^2} dx$$

$$5.20. \int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{\arctg x}}$$

$$5.2. \int \frac{\sqrt{\arctg^2 x}}{1 + x^2} dx$$

$$5.12. \int \frac{\arccos^6 3x}{1 + 9x^2} dx$$

$$5.22. \int \frac{dx}{(1 + x^2)\arctg^5 x}$$

$$5.3. \int \frac{\sqrt{\arctg^3 x}}{1 + x^2} dx$$

$$5.13. \int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx.$$

$$5.23. \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}\arcsin^4 x}$$

$$5.4. \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$5.14. \int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$5.24. \int \frac{\sqrt[3]{\arctg 2x}}{1 + 4x^2} dx$$

$$5.5. \int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

$$5.15. \int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1 - 16x^2}} dx$$

$$5.25. \int \frac{\sqrt[3]{\arccos 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$$

$$5.6. \int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$$

$$5.16. \int \frac{\arccos^7 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$5.26. \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - 25x^2)}\arcsin 5x}$$

$$5.7. \int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$$

$$5.17. \int \frac{\arccos^4 5x}{1 + 25x^2} dx$$

$$5.27. \int \frac{\arctg^8 3x}{1 + 9x^2} dx$$

$$5.8. \int \frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{1+4x^2} dx$$

$$5.9. \int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$5.10. \int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$5.18. \int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}} dx$$

$$5.19. \int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x} dx$$

$$5.20. \int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^7 x} dx$$

$$5.12. \int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}} dx$$

$$5.29. \int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2} dx$$

$$5.30. \int \frac{\operatorname{arctg}^4 8x}{1+64x^2} dx$$

6.

$$6.1. \int \frac{x-1}{7x^2+4} dx$$

$$6.2. \int \frac{1-2x}{5x^2-1} dx$$

$$6.3. \int \frac{2x+1}{5x^2+1} dx$$

$$6.4. \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

$$6.5. \int \frac{3x-2}{2x^2+7} dx$$

$$6.6. \int \frac{5-x}{3x^2+1} dx$$

$$6.7. \int \frac{x+5}{3x^2+1} dx$$

$$6.8. \int \frac{2x-5}{\sqrt{7x^2+3}} dx$$

$$6.9. \int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}} dx$$

$$6.10. \int \frac{3x-2}{3x^2+1} dx$$

$$6.11. \int \frac{x-1}{5-2x^2} dx$$

$$6.12. \int \frac{2x+3}{5x^2+2} dx$$

$$6.13. \int \frac{x-3}{1-4x^2} dx$$

$$6.14. \int \frac{5x-2}{x^2+9} dx$$

$$6.15. \int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}} dx$$

$$6.16. \int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$6.17. \int \frac{3x+4}{5-2x^2} dx$$

$$6.18. \int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+9}} dx$$

$$6.19. \int \frac{x-5}{8-4x^2} dx$$

$$6.20. \int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}} dx$$

$$6.21. \int \frac{2x+3}{1-3x^2} dx$$

$$6.22. \int \frac{x-3}{4x^2+1} dx$$

$$6.23. \int \frac{3x-1}{4-x^2} dx$$

$$6.24. \int \frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}} dx$$

$$6.25. \int \frac{2x-4}{x^2+16} dx$$

$$6.26. \int \frac{2x-1}{\sqrt{5-3x^2}} dx$$

$$6.27. \int \frac{3x-3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$6.28. \int \frac{3-2x}{x^2-8} dx$$

$$6.29. \int \frac{x+4}{7x^2+3} dx$$

$$6.30. \int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}} dx$$

7.

$$7.1. \int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$$

$$7.2. \int \sqrt[3]{(1+2x)^2} dx$$

$$7.3. \int \frac{1}{\sqrt[4]{(1-4x)^3}} dx$$

$$7.4. \int (8x+5)^{10} dx$$

$$7.5. \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$7.6. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$7.11. \int \sin^2 x \cdot \cos x dx$$

$$7.12. \int \sqrt[5]{(7-3x)^2} dx$$

$$7.13. \int \frac{1}{\sqrt[4]{(2+5x)}} dx$$

$$7.14. \int 2(3x-5)^5 dx$$

$$7.15. \int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}} dx$$

$$7.16. \int x^2 \cos(4-x^3) dx$$

$$7.21. \int x^2 \sin x^3 dx$$

$$7.22. \int \sqrt[4]{(1-4x)^3} dx$$

$$7.23. \int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-6x)^2}} dx$$

$$7.24. \int 3(5x-8)^4 dx$$

$$7.25. \int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^4}} dx$$

$$7.26. \int x^2 \cos(x^3+5) dx$$



7.7.  $\int x^3 \sin 3x^4 dx$

7.17.  $\int x^2 \sin 2x^3 dx$

7.27.  $\int \frac{\sin 3x}{2 + \cos 3x} dx$

7.8.  $\int \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} dx$

7.18.  $\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx$

7.28.  $\int (3x^3 - 1)^5 x^2 dx$

7.9.  $\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx$

7.19.  $\int e^{-3x^2+1} \cdot x dx$

7.29.  $\int e^{x^3+1} \cdot x^2 dx$

7.10.  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

7.20.  $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)} dx$

7.30.  $\int \frac{e^{3x}}{(e^{3x} - 1)} dx$

**8.**

1.  $\int x \cos 6x dx$

11.  $\int x \cos(x - 7) dx$

1.21.  $\int \arctg \frac{x}{5} dx$

2.  $\int x \sin(x - 5) dx$

12.  $\int \ln(x + 12) dx$

22.  $\int \arcsin \frac{x}{5} dx$

3.  $\int \arcsin 3x dx$

13.  $\int (x - 4) e^x dx$

23.  $\int \arccos 2x dx$

4.  $\int \arctg 8x dx$

14.  $\int x e^{-6x} dx$

1.24.  $\int \ln(2x - 1) dx$

5.  $\int x \sin(x - 2) dx$

15.  $\int \arctg 7x dx$

1.25.  $\int \ln(2x + 3) dx$

6.  $\int \arcsin 8x dx$

1.16.  $\int \arcsin 5x dx$

1.26.  $\int \arccos \frac{x}{5} dx$

7.  $\int x \sin(x + 3) dx$

1.17.  $\int \ln(x - 7) dx$

1.27.  $\int \arctg \frac{x}{4} dx$

8.  $\int x \cos(x + 4) dx$

1.18.  $\int x \cos(x + 6) dx$

1.28.  $\int \arcsin \frac{x}{7} dx$

9.  $\int \arccos 7x dx$

1.19.  $\int \arctg \frac{x}{2} dx$

1.29.  $\int \arctg 6x dx$

10.  $\int \ln(2x - 4) dx$

1.20.  $\int \ln(x + 8) dx$

1.30.  $\int \arccos \frac{x}{3} dx$

2. Найти интеграл  $\int (\kappa x + \kappa) e^{\kappa x} dx$ , где  $\kappa$  – порядковый номер в журнале

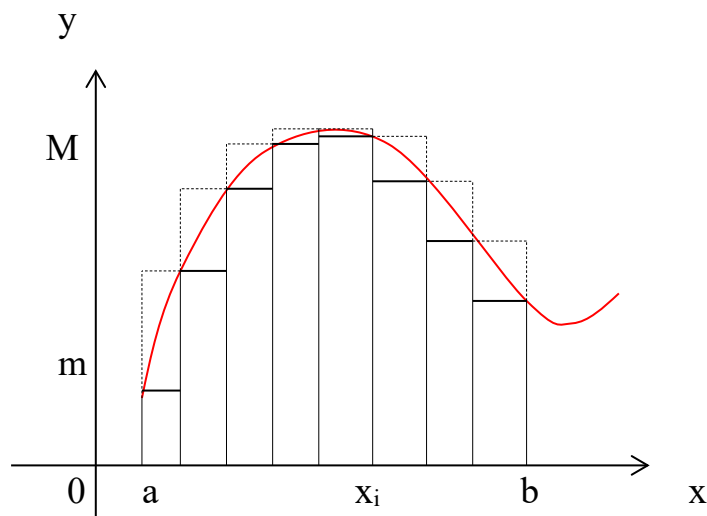
3. Найти интеграл  $\int (\kappa x - 4) \sin \kappa x dx$ , где  $\kappa$  – порядковый номер в журнале

**Контрольные вопросы:**

1. Таблица интегралов.
2. В чем суть метода добавочного коэффициента?
3. Метод подстановки.
4. Метод интегрирования по частям.

**Теоретические сведения****Определенный интеграл.**

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $f(x)$ .



Обозначим  $m$  и  $M$  наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке  $[a, b]$

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на части (не обязательно одинаковые)  $n$  точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Тогда  $x_1 - x_0 = \Delta x_1$ ,  $x_2 - x_1 = \Delta x_2$ ,  $\dots$ ,  $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$ ;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$$[x_0, x_1] \rightarrow m_1, M_1; \quad [x_1, x_2] \rightarrow m_2, M_2; \quad \dots \quad [x_{n-1}, x_n] \rightarrow m_n, M_n.$$

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$\bar{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Сумма  $\underline{S}$  называется **нижней интегральной суммой**, а сумма  $\bar{S}$  – **верхней интегральной суммой**.

$$\text{Т.к. } m_i \leq M_i, \text{ то } \underline{S}_n \leq \bar{S}_n, \quad \text{а} \quad m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \bar{S}_n \leq M(b-a)$$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку  $\varepsilon$ .

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

$$S_n = f(\varepsilon_1) \Delta x_1 + f(\varepsilon_2) \Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$$

$$\text{Тогда можно записать: } m_i \Delta x_i \leq f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$$

$$\text{Следовательно, } \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции  $f(x)$  ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим  $\max \Delta x_i$  – наибольший отрезок разбиения, а  $\min \Delta x_i$  – наименьший. Если  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , то число отрезков разбиения отрезка  $[a, b]$  стремится к бесконечности.

Если  $S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$ , то  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = S$ .

**Определение:** Если при любых разбиениях отрезка  $[a, b]$  таких, что  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$  и произвольном выборе точек  $\varepsilon_i$  интегральная сумма  $S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$  стремится к пределу  $S$ , который называется определенным интегралом от  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

$$\text{Обозначение : } \int_a^b f(x) dx$$

$a$  – нижний предел,  $b$  – верхний предел,  $x$  – переменная интегрирования,  $[a, b]$  – отрезок интегрирования.

**Определение:** Если для функции  $f(x)$  существует предел  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ , то функция называется **интегрируемой** на отрезке  $[a, b]$ .

Также верны утверждения:  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

**Теорема:** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

$$1) \int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx,$$

$$2) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$4) \text{ Если } f(x) \leq \varphi(x) \text{ на отрезке } [a, b] \text{ } a < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$$

5) Для произвольных чисел  $a, b, c$  справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

$$6) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

### **Вычисление определенного интеграла.**

Пусть в интеграле  $\int_a^b f(x) dx$  нижний предел  $a = \text{const}$ , а верхний предел  $b$  изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим  $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)$ . Найдем производную функции  $\Phi(x)$  по переменному верхнему пределу  $x$ .

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

**Теорема:** Для всякой функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

**Теорема:** (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция  $F(x)$  – какая-либо первообразная от непрерывной функции  $f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение  $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$ .

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

**Замена переменных.**

Пусть задан интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ , где  $f(x)$  – непрерывная функция на отрезке  $[a, b]$ .

Введем новую переменную в соответствии с формулой  $x = \varphi(t)$ .

Тогда если

- 1)  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$
- 2)  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  непрерывны на отрезке  $[\alpha, \beta]$
- 3)  $f(\varphi(t))$  определена на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$\text{Тогда } \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция  $\sin$ ) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi$ , с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \{ \operatorname{tg} x = t \} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная  $\operatorname{tg} x$  имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке  $x = \pi/2$ ). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

### **Интегрирование по частям.**

Если функции  $u = \varphi(x)$  и  $v = \psi(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

**Задания практической работы** Вычислить определенный интеграл  
1.

1. a)  $\int_1^2 (3x^2 - 2x) dx$   
b)  $\int_{\Pi}^{2\Pi} \frac{\cos x}{6} dx$
2. a)  $\int_{-2}^1 (x^2 - x) dx$   
b)  $\int_{-\Pi/6}^{\Pi/6} \frac{6dx}{\cos^2 2x}$
3. a)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos x dx$   
b)  $\int_0^2 (1 - \frac{x}{2})^4 dx$
4. a)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\cos^2 x} dx$   
b)  $\int_{-1}^4 (1 + \frac{x}{2})^8 dx$
5. a)  $\int_1^2 (4x^3 + 2x) dx$   
b)  $\int_0^{\Pi} \frac{3dx}{\cos^2(\frac{x}{2} - \frac{\Pi}{3})}$
6. a)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 \cos 2x) dx$   
b)  $\int_1^5 \sqrt{9x - 1} dx$
7. a)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (6 \sin 2x) dx$   
b)  $\int_1^2 (3 - 2x)^4 dx$
11. a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\cos^2 \frac{1}{2}x} dx$   
b)  $\int_2^3 (1 - x)^4 dx$
12. a)  $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos \frac{1}{3}x dx$   
b)  $\int_{-1}^4 (1 + \frac{x}{2})^8 dx$
13. a)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^3 (3x^2 - 2x) dx$   
b)  $\int_{-\Pi/2}^{\Pi/2} 3 \sin x dx$
14. a)  $\int_0^{\pi} \left( 3 \sin \frac{1}{2}x \right) dx$   
b)  $\int_1^0 (1 - 2x)^4 dx$
15. a)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (36 \cos 2x) dx$   
b)  $\int_{-2}^3 \frac{2dx}{(3 - x^2)}$
16. a)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$   
b)  $\int_2^3 (1 - 2x)^4 dx$
17. a)  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{36}{\cos^2 2x} dx$   
b)  $\int_2^3 (3 - x^2) dx$
21. a)  $\int_1^2 (4x^3 - 3x^2) dx$   
b)  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$
22. a)  $\int_0^{\frac{\pi}{9}} (2 \cos 3x) dx$   
b)  $\int_0^2 (1 - \frac{x}{2})^4 dx$
23. a)  $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (108 \sin 6x) dx$   
b)  $\int_{-1}^1 (7 - 5x) dx$
24. a)  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{4}{\cos^2 2x} dx$   
b)  $\int_{-2}^1 (4x^3 + 6x) dx$
25. a)  $\int_1^2 (5x^4 - 6x^2) dx$   
b)  $\int_1^9 \sqrt{8x - 5} dx$
26. a)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{\sin^2 x} dx$   
b)  $\int_{-2}^0 (x^5 - 3x^2)$
27. a)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \sin x) dx$   
b)  $\int_1^2 (\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^3}) dx$

$$8. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{\cos^2 x} dx$$

$$b) \int_{-3}^1 \frac{dx}{5-3x}$$

$$9. \quad a) \int_0^2 (x^3 - x^2 + 3) dx$$

$$b) \int_1^2 e^{2x+3} dx$$

$$10. \quad a) \int_1^2 (x^4 - x^3 + 2) dx$$

$$b) \int_0^1 5^{4-3x} dx$$

$$18. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x) dx$$

$$b) \int_0^4 (x^2 + 1) dx$$

$$19. \quad a) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$$

$$b) \int_2^3 (7-2x)^4 dx$$

$$20. \quad a) \int_0^2 (x^3 - x) dx$$

$$b) \int_0^{\pi/3} 3 \sin 3x dx$$

$$28. \quad a) \int_1^3 (3x^2 + 4x^3) dx$$

$$b) \int_{\pi/4}^{\pi/8} \frac{\cos 4x}{2} dx$$

$$29. \quad a) \int_2^3 (2x^3 - 2x) dx$$

$$b) \int_0^{\pi/6} \frac{4dx}{\cos^2 2x}$$

$$30. \quad a) \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} (2 \sin 3x) dx$$

$$b) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4}$$

## 2.

$$1. \quad \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx$$

$$2. \quad \int_0^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3. \quad \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$4. \quad \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$$

$$5. \quad \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$$

$$6. \quad \int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$$

$$7. \quad \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$$

$$8. \quad \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$$

$$9. \quad \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x^4+4)}}$$

$$10. \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11. \quad \int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$$

$$12. \quad \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$$

$$13. \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$$

$$14. \quad \int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx$$

$$15. \quad \int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx$$

$$16. \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$$

$$17. \quad \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$$

$$18. \quad \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$$

$$19. \quad \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$$

$$20. \quad \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1-\ln^2 x}}$$

$$21. \quad \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$$

$$22. \quad \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$23. \quad \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}$$

$$24. \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$$

$$25. \quad \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx$$

$$26. \quad \int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$$

$$27. \quad \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$$

$$28. \quad \int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$$

$$29. \quad \int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$$

$$30. \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$$

## 3.

1.  $\int_0^1 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$
2.  $\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$
3.  $\int_2^3 \frac{x + 2}{x^2(x - 1)} dx$
4.  $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x - 1)}$
5.  $\int_{-1}^1 \frac{y^5 dy}{y + 2}$
6.  $\int_2^3 \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx$
7.  $\int_{1/3}^{1/2} \frac{xdx}{(x - 1)^3}$
8.  $\int_4^5 \frac{dx}{(x - 1)(x + 2)}$
9.  $\int_3^4 \frac{dx}{(x + 1)(x - 2)}$
10.  $\int_0^1 \frac{(2x + 3)dx}{(x - 3)^3}$
11.  $\int_2^3 \frac{dx}{(x - 1)^2(x + 1)}$
12.  $\int_3^5 \frac{(x^2 + 2)dx}{(x^2 + 1)(x - 1)}$
13.  $\int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x + 1)^2} dx$
14.  $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2 + 3x + 2}$
15.  $\int_8^{10} \frac{(x^2 + 3)dx}{x^3 - x^2 - 6x}$
16.  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + x^2}$
17.  $\int_2^3 \frac{x^7 dx}{1 - x^4}$
18.  $\int_2^3 \frac{dx}{x^4 - 1}$
19.  $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{x^3 - 1}$
20.  $\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2x^2 + 4}{x^3 - x^2 + x + 1} dx$
21.  $\int_4^5 \frac{dx}{x^2(x - 1)}$
22.  $\int_0^2 \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 4)}$
23.  $\int_7^9 \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx$
24.  $\int_4^6 \frac{xdx}{x^3 - 6x^2 + 16 - 6}$
25.  $\int_1^2 \frac{dx}{x^3 + 1}$
26.  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5 + 1}{x^6 + x^4} dx$
27.  $\int_2^3 \frac{x^3 + x^2 + 2}{x(x^2 - 1)^2} dx$
28.  $\int_3^5 \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x - 2)^2} dx$
29.  $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}$
30.  $\int_{-1}^0 \frac{x^5 - 2x^2 + 3}{(x - 2)^2} dx$

#### 4.

- 1.1 a)  $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + x^2} dx$   
b)  $\int_0^2 (2 - x)^2 dx$
- 1.2 a)  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 - x)^3}}$   
b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(3 - \sin x)^2}$
- 1.3 a)  $\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + 3x}}$   
b)  $\int_1^2 \frac{(2x^2 + 1)dx}{x}$
- 1.11 a)  $\int_{-1}^2 \frac{6x^2 dx}{(x^3 - 5)^2}$   
b)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cos x dx$
- 1.12 a)  $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$   
b)  $\int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{25 - 3x^2} dx$
- 1.13 a)  $\int_0^1 x^3 \sqrt{4 + 5x^4} dx$   
b)  $\int_1^2 \frac{(x - 1)dx}{x^3}$
- 1.21 a)  $\int_{2\sqrt{2}}^4 3x \sqrt{x^2 - 7} dx$   
b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx$
- 1.22 a)  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1 - 2x}}$   
b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(8 - 7 \sin x)^2}$
- 1.23 a)  $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}$   
b)  $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}$



1.4	$a) \int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$ $b) \int_1^2 \frac{xdx}{(2x^2+4)^4}$	1.14	$a) \int_0^3 6x^3(3x^4-1)^2 dx$ $b) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{8-7x^3}}$	1.24	$a) \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$ $b) \int_1^3 \sqrt{(2x+1)^3} dx$
1.5	$a) \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$ $b) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(5-\sin x)^2}$	1.15	$a) \int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx$ $b) \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{9+2x^3}}$	1.25	$a) \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$ $b) \int_4^5 (4-x)^3 dx$
1.6	$a) \int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x^2+1}$ $b) \int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{1+x^2} dx$	1.16	$a) \int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $b) \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx$	1.26	$a) \int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$ $b) \int_1^e \frac{5 \ln^2 x}{x} dx$
1.7	$a) \int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$ $b) \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx$	1.17	$a) \int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$ $b) \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$	1.27	$a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$ $b) \int_0^1 (x^3-4) dx$
1.8	$a) \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}$ $b) \int_0^{\pi/2} 3 \cos 2x dx$	1.18	$a) \int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$ $b) \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$	1.28	$a) \int_3^8 \sqrt{x+1} dx$ $b) \int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^3}$
1.9	$a) \int_1^e \frac{3 \ln^2 x}{x} dx$ $b) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{8-7x^3}}$	1.19	$a) \int_0^1 (4x^3+1)^5 x^2 dx$ $b) \int_0^1 x^2 e^{x^3+1} dx$	1.29	$a) \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$ $b) \int_{\frac{2\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) dx$
1.10	$a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$ $b) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(8-\sin x)^2}$	1.20	$a) \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx$ $b) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{32x dx}{(x^2+1)^5}$	1.30	$a) \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$ $b) \int_0^1 e^{x^2} x dx$

## 5.

2.1	$\int_2^3 x \ln(x-1) dx$		$\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$		$\int_2^3 (3-x) e^x dx$
2.2	$\int_{-2}^0 x^2 e^{-x/2} dx$		$\int_0^1 \arctg \sqrt{x} dx$		$\int_{1/2}^1 \arcsin(1-x) dx$
2.3	$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$		$\int_0^{\pi} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx$		$\int_1^{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{x} dx$

$$2.4 \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$$

$$\int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx$$

$$\int_{-1}^0 x \ln(1-x) dx$$

$$2.5 \int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$$

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx$$

$$\int_0^{\pi/6} e^{\sin x} \cos x dx$$

$$2.6 \int_1^2 (x-1) \ln x dx$$

$$\int_1^e (x+1) \ln x dx$$

$$\int_{-1}^0 (2x+3) e^{-x} dx$$

$$2.7 \int_{-1/2}^0 x e^{-2x} dx$$

$$\int_{3/2}^2 \arctg(2x-3) dx$$

$$\int_{-1}^0 (x+1) e^{-2x} dx$$

$$2.8 \int_1^2 x e^x dx$$

$$\int_0^{\pi/2} (x+3) \sin x dx$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$$

$$2.9 \int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}} dx$$

$$\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$$

$$\int_0^1 x \arctg x dx$$

$$2.10 \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$$

$$\int_{-3}^0 (x-2) e^{-x/3} dx$$

$$\int_1^2 \ln(3x+2) dx$$

### Контрольные вопросы

1. Что называют определенным интегралом функции  $f(x)$ ?
2. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
3. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .
5. Запишите свойства определенного интеграла.
6. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
7. Расскажите об основных методах интегрирования определенного интеграла.

## Практическая работа № 9

### по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»

**Цель:** проверить умение решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными.

**Время выполнения** 90 минут

#### Материальное обеспечение

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

#### Порядок выполнения работы

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

#### Домашнее задание

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

#### Теоретический материал

*Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y$  и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x, y, y') = 0, \quad F(x, y, y'') = 0, \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

*Порядком* дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

*Решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

*Общим решением* (или *общим интегралом*) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

*Частным решением* дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

*Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

*Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными* называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

### Примеры

**Задание 1:** Найдите общее решение уравнения  $x \cdot (1 + y^2)dx = ydy$ .

**Решение:** Разделив переменные, имеем  $x dx = \frac{y dy}{1 + y^2}$ . Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int x dx = \int \frac{y dy}{1 + y^2}; \quad \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) + \frac{1}{2} \ln C.$$

Так как произвольная постоянная  $C$  может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо  $C$  мы написали  $\frac{1}{2} \ln C$ . Потенцируя последнее равенство, получим  $x^2 = \ln[C \cdot (1 + y^2)]$ .

Это и есть общее решение данного уравнения.

**Задание 2:** Найти частное решение уравнения  $s \cdot \operatorname{tg} t dt + ds = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $s = 4$  при  $t = \frac{\pi}{3}$ .

**Решение:** Разделив переменные, имеем  $\operatorname{tg} t dt + \frac{ds}{s} = 0$ . Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \operatorname{tg} t dt + \int \frac{ds}{s} = \ln C; \quad -\ln \cos t + \ln s = \ln C,$$

$$\text{Или } \ln s = \ln C + \ln \cos t, \quad s = C \cos t.$$

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной  $C$  подставим значения  $t = \frac{\pi}{3}$  и  $s = 4$  в выражение для общего

решения:  $4 = C \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , или  $4 = \frac{C}{2}$ , откуда  $C = 8$ .

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид  $s = 8 \cos t$ .

### Задания практической работы

**Задание 1.** Найти общее решение уравнений а), б).

**Задание 2.** Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными

**B1.1.** а)  $x^2 dx = 3y^2 dy$

б)  $y(1+x)dx + x(1-y) dy = 0$

2.  $y^2 dx = e^{-x} dy$ ;  $y = 1$  при  $x = 0$

**B2.** 1.а)  $\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$

б)  $y^2 dx + (x-2) dy = 0$

2.  $\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy$ ,  $y = 2$  при  $x = 0$

**B3** 1.а)  $\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$

б)  $(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$

2.  $(1+y) dx = (1-x) dy$ ,  
 $y = 3$  при  $x = -2$

**B4.** 1.а)  $(3x^2 - 2x) dx = dy$

б)  $-(2xy+3y)dx + x^2 dy = 0$

2.  $y dx = x dy$ ,  $y = 6$  при  $x = 2$

**B5.** 1.а)  $(4x - 3) dx = dy$

б)  $(xy+x)\frac{dx}{dy}=1$

2.  $\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}$ ,  $y = 0$  при  $x = 5$

**B6.** 1.а)  $x dx = dy$

б)  $2(xy+y)dx = x dy$

2.  $(y+1) dx - (1-x) dy = 0$ ,  
 $y = 1$  при  $x = 0$

**B7.1.**а)  $x^2 dx = 3y^2 dy$

б)  $y(1+x)dx + x(1-y) dy = 0$

2.  $y^2 dx = e^{-x} dy$ ;  $y = 1$  при  $x = 0$

**B8.1.**а)  $\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$

б)  $y^2 dx + (x-2) dy = 0$

2.  $\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy$ ,  $y = 2$  при  $x = 0$

**B9.** 1.а)  $\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$

б)  $(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$

2.  $(1+y) dx = (1-x) dy$ ,  
 $y = 3$  при  $x = -2$

**B16.1.**а)  $x^2 dx = 3y^2 dy$

б)  $y(1+x)dx + x(1-y) dy = 0$

2.  $dx = e^{-x} dy$ ;  $y = 1$  при  $x = 0$

**B17.** 1.а)  $\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$

б)  $y^2 dx + (x-2) dy = 0$

2.  $dx = \frac{1}{x^2} dy$ ,  $y = 2$  при  $x = 0$

**B18.** 1.а)  $\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$

б)  $(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$

2.  $(1+y) dx = (1-x) dy$ ,  
 $y = 3$  при  $x = -2$

**B19.** 1.а)  $(3x^2 - 2x) dx = dy$

б)  $-(2xy+3y)dx + x^2 dy = 0$

2.  $y dx = x dy$ ,  $y = 6$  при  $x = 2$

**B20.** 1.а)  $(4x - 3) dx = dy$

б)  $(xy+x)\frac{dx}{dy}=1$

2.  $\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}$ ,  $y = 0$  при  $x = 5$

**B21.1.**а)  $x dx = dy$

б)  $2(xy+y)dx = x dy$

2.  $(y+1) dx - (1-x) dy = 0$ ,  
 $y = 1$  при  $x = 0$

**B22.1.**а)  $x^2 dx = 3y^2 dy$

б)  $y(1+x)dx + x(1-y) dy = 0$

2.  $y^2 dx = e^{-x} dy$ ;  $y = 1$  при  $x = 0$

**B23.** 1.а)  $\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$

б)  $y^2 dx + (x-2) dy = 0$

2.  $\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy$ ,  $y = 2$  при  $x = 0$

**B24.1.**а)  $\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$

б)  $(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$

2.  $(1+y) dx = (1-x) dy$ ,  
 $y = 3$  при  $x = -2$

**B10** 1.a)  $(3x^2 - 2x) dx = dy$   
 б)  $-(2xy+3y)dx + x^2 dy = 0$   
 2.  $y dx = x dy, y = 6$  при  $x = 2$

**B11** 1.a)  $(4x - 3) dx = dy$   
 б)  $(xy+x)\frac{dx}{dy}=1$   
 2.  $\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}, y = 0$  при  $x = 5$

**B12** 1.a)  $x dx = dy$   
 б)  $2(xy+y)dx = x dy$   
 2.  $(y + 1) dx - (1 - x) dy = 0,$   
 $y = 1$  при  $x = 0$

**B13** 1.a)  $x^2 dx = 3y^2 dy$   
 б)  $y(1+x)dx + x(1 - y) dy = 0$   
 2.  $y^2 dx = e^{-x} dy;$   
 $y = 1$  при  $x = 0$

**B14** 1.a)  $\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$   
 б)  $y^2 dx + (x - 2) dy = 0$   
 2.  $\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy, y = 2$  при  $x = 0$

**B15** 1.a)  $\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$   
 б)  $(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$   
 2.  $(1 + y) dx = (1 - x) dy,$   
 $y = 3$  при  $x = -2$

**B25** 1.a)  $(3x^2 - 2x) dx = dy$   
 б)  $-(2xy+3y)dx + x^2 dy = 0$   
 2.  $y dx = x dy, y = 6$  при  $x = 2$

**B26** 1.a)  $(4x - 3) dx = dy$   
 б)  $(xy+x)\frac{dx}{dy}=1$   
 2.  $\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}, y = 0$  при  $x = 5$

**B27** 1.a)  $x dx = dy$   
 б)  $2(xy+y)dx = x dy$   
 2.  $(y + 1) dx - (1 - x) dy = 0,$   
 $y = 1$  при  $x = 0$

**B28** 1.a)  $x^2 dx = 3y^2 dy$   
 б)  $y(1+x)dx + x(1 - y) dy = 0$   
 2.  $y^2 dx = e^{-x} dy; y = 1$  при  $x = 0$

**B29** 1.a)  $\frac{1}{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{\sqrt{y}} dx$   
 б)  $y^2 dx + (x - 2) dy = 0$   
 2.  $\frac{1}{y^2} dx = \frac{1}{x^2} dy, y = 2$  при  $x = 0$

**B30** 1.a)  $\sqrt{x} dx = \sqrt{y} dy$   
 б)  $(1+y^2)dx - \sqrt{x} dy = 0$   
 2.  $(1 + y) dx = (1 - x) dy,$   
 $y = 3$  при  $x = -2$

### Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим?
4. Какое решение дифференциального уравнения называется частным?
5. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями первого порядка?
6. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными?

## Практическая работа № 10

### по теме «Дифференциальные уравнения второго порядка»

**Цель:** научиться решать линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

**Время выполнения** 90 минут

#### **Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

#### **Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

#### **Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

#### **Теоретические сведения**

Уравнение, содержащее производные (или дифференциалы) не выше второго порядка, называется *дифференциальным уравнением второго порядка*. В общем виде уравнение второго порядка записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

*Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0, \quad (1)$$

где  $p$  и  $q$  - постоянные величины.

Для отыскания общего решения уравнения (1) составляется *характеристическое уравнение*

$$r^2 + pr + q = 0, \quad (2)$$

которое получается из уравнения (1) заменой  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $\frac{dy}{dx}$  и  $y$  на соответствующие степени  $r$ , причем сама функция  $y$  заменяется единицей.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (1) строится в зависимости от корней  $r_1$  и  $r_2$  характеристического уравнения (2). Здесь возможны три случая.

I случай: Корни  $r_1$  и  $r_2$  - действительные и различные. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \quad (3)$$

II случай: Корни  $r_1$  и  $r_2$  - действительные и равные:  $r_1 = r_2 = r$ . Тогда общее решение уравнения (1) записывается так:

$$y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{rx}. \quad (4)$$

III случай: Корни  $r_1$  и  $r_2$  - комплексно - сопряженные:  $r_1 = \alpha + \beta \cdot i$ ,  $r_2 = \alpha - \beta \cdot i$ . В этом случае общее решение уравнения (1) записывается следующим образом:

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (5)$$

### Примеры

**Задание 1:** Решить уравнение:  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 7 \frac{dy}{dx} + 10y = 0$ .

**Решение:** Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:  $r^2 - 7r + 10 = 0$ . Отсюда следует, что  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 5$ . Так как корни характеристического уравнения действительные и разные, то общее решение данного дифференциального уравнения согласно формуле (3) запишется так:  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$ .

**Задание 2:** Найти частное решение уравнения  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} = 0$ , если  $y = 1$  и  $\frac{dy}{dx} = -1$  при  $x = 0$ .

**Решение:** Составим характеристическое уравнение  $r^2 - 5r = 0$ . Решая его, получим,  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 5$ . Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид:  $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{5x}$ , то есть  $y = C_1 + C_2 e^{5x}$ .

Для нахождения искомого частного решения нужно определить значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Подставив в общее решение значения  $x = 0$  и  $y = 1$ , получим  $1 = C_1 + C_2$ .

Продифференцировав общее решение и подставив в полученное выражение значения  $x = 0$  и  $\frac{dy}{dx} = -1$ , имеем  $\frac{dy}{dx} = 5C_2 e^{5x}$ , отсюда следует, что  $-1 = 5C_2$ . Из

данного выражения находим:  $C_2 = -\frac{1}{5}$ ,  $C_1 = 1 - C_2 = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}$ .

Таким образом, искомое частное решение имеет вид  $y = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} e^{5x}$ .

**Задание 3:** Решить уравнение  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 8 \frac{dy}{dx} + 16y = 0$ .

**Решение:** Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:  $r^2 - 8r + 16 = 0$ ,  $r_1 = r_2 = 4$ . Характеристическое уравнение имеет равные действительные корни; поэтому согласно формуле (4) общее решение данного дифференциального уравнения записывается в виде  $y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{4x}$ .



**Задание 4:** Найдите частное решение уравнения  $y'' + 8y' + 16y = 0$ , если  $y = 1$  и  $y' = 1$  при  $x = 0$ .

**Решение:** Так как характеристическое уравнение  $r^2 + 8r + 16 = 0$  имеет равные действительные корни  $r_1 = r_2 = -4$ , то общее решение данного дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-4x} = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}.$$

Дифференцируя общее решение, имеем

$$y' = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-4x} - 4C_2 x e^{-4x}.$$

Подставив начальные данные в выражение для  $y$  и  $y'$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 \\ 1 = -4C_1 e^0 + C_2 e^0 - 4C_2 \cdot 0 \cdot e^0 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -4C_1 + C_2 \end{cases}, \text{ откуда } C_1 = 1 \text{ и } C_2 = 5.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид  $y = e^{-4x} + 5x e^{-4x}$ .

### Задания практической работы

**Задания** Решить однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. В пункте а) найти частное решение при заданных начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

1,10. а)  $y'' + y' - 2y = 0$   $y(0) = 1$   $y'(0) = 3$  б)  $y'' + 12y' + 36y = 0$

в)  $4y'' + 9y = 0$

2,12. а)  $3y'' - 2y' - 8y = 0$   $y(0) = 1$   $y'(0) = 1$

б)  $y'' - 6y' + 9y = 0$  в)  $y'' - 8y' + 17y = 0$

3,13. а)  $y'' - 4y' + 3y = 0$   $y(0) = 6$   $y'(0) = 10$

б)  $y'' + 8y' + 16y = 0$  в)  $4y'' - 20y' + 25y = 0$

4,14. а)  $y'' - 7y' + 6y = 0$   $y(0) = 2$   $y'(0) = -1$

б)  $y'' + 10y' + 25y = 0$  в)  $y'' + 2y' + 5y = 0$

5,15. а)  $2y'' + y' - y = 0$   $y(0) = 1$   $y'(0) = -1$

б)  $4y'' - 4y' + y = 0$  в)  $y'' - 2y' + 10y = 0$

6,16. а)  $2y'' + 5y' = 0$   $y(0) = 1$   $y'(0) = 4$

б)  $y'' - 14y' + 49y = 0$  в)  $y'' + 4y = 0$

7,17. а)  $12y'' + 5y' = 0$   $y(0) = 2$   $y'(0) = 2$

$$\begin{array}{ll}
\text{б)} \quad 9y'' - 6y' + y = 0 & \text{в)} \quad 5y'' - 6y' + 5y = 0 \\
8,18. \text{ а)} \quad y'' - 6y' + 8y = 0 & y(0) = 2 \quad y'(0) = -4 \\
\text{б)} \quad 16y'' + 8y' + y = 0 & \text{в)} \quad y'' - 6y' + 13y = 0 \\
9,19. \text{ а)} \quad y'' - 4y' - 5y = 0 & y(0) = 2 \quad y'(0) = -3 \\
\text{б)} \quad 16y'' + 24y' + 9y = 0 & \text{в)} \quad y'' - 4y' + 13y = 0 \\
10,20. \text{ а)} \quad y'' - 3y' + 2y = 0 & y(0) = 1 \quad y'(0) = 6 \\
\text{б)} \quad 9y'' + 6y' + y = 0 & \text{в)} \quad y'' + 9y = 0
\end{array}$$

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Что называют порядком дифференциального уравнения?
3. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения.
4. Что называют условиями Коши?
5. Что называют задачей Коши?
6. Дайте определение частного решения дифференциального уравнения.
7. Какие уравнения называются дифференциальными уравнениями II порядка?
8. Понятие характеристического уравнения.
9. Общее решение уравнения характеристического уравнения.

## Практическая работа № 11

по теме «Исследование числовых рядов на сходимость»

**Цель:** научиться исследовать числовые ряды на сходимость

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Теоретические сведения**

**Определение.** Сумма членов бесконечной числовой последовательности  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа  $u_1, u_2, \dots$  будем называть членами ряда, а  $u_n$  – общим членом ряда.

**Определение.** Суммы  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$ ,  $n = 1, 2, \dots$  называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$

**Определение.** Ряд  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

**Определение.** Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

**Свойства рядов.**

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда  $\sum u_n$  и  $\sum C u_n$ , где  $C$  – постоянное число.

**Теорема.** Если ряд  $\sum u_n$  сходится и его сумма равна  $S$ , то ряд  $\sum C u_n$  тоже сходится, и его сумма равна  $CS$ . ( $C \neq 0$ )

3) Рассмотрим два ряда  $\sum u_n$  и  $\sum v_n$ . Суммой или разностью этих рядов будет называться ряд  $\sum (u_n \pm v_n)$ , где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

**Теорема.** Если ряды  $\sum u_n$  и  $\sum v_n$  сходятся и их суммы равны соответственно  $S$  и  $\sigma$ , то ряд  $\sum (u_n \pm v_n)$  тоже сходится и его сумма равна  $S + \sigma$ .

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.

Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.

О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

1) Если ряд  $\sum u_n$  сходится, то необходимо, чтобы общий член  $u_n$  стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

**Пример.** Исследовать сходимость ряда  $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{3n-1} + \dots$

Найдем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$  - необходимый признак сходимости не

выполняется, значит ряд расходится.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако, этот признак также не является достаточным.

Например, ряд  $1-1+1-1+1-1+ \dots + (-1)^{n+1} + \dots$  расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при четных } n \\ 1, & \text{при нечетных } n \end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к.  $|S_n| < 2$  при любом  $n$ .

### **Ряды с неотрицательными членами.**

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на  $-1$  из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

**Теорема.** Для сходимости ряда  $\sum u_n$  с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда  $\sum u_n$  и  $\sum v_n$  при  $u_n, v_n \geq 0$ .

**Теорема.** Если  $u_n \leq v_n$  при любом  $n$ , то из сходимости ряда  $\sum v_n$  следует сходимость ряда  $\sum u_n$ , а из расходимости ряда  $\sum u_n$  следует расходимость ряда  $\sum v_n$ .

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд  $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} + \dots$

Т.к.  $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ , а гармонический ряд  $\sum \frac{1}{n}$  расходится, то расходится и ряд  $\sum \frac{1}{\ln n}$

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ .

Т.к.  $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$ , а ряд  $\sum \frac{1}{2^n}$  сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$  тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости

**Теорема.** Если  $u_n > 0$ ,  $v_n > 0$  и существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = h$ , где  $h$  – число, отличное от нуля, то ряды  $\sum u_n$  и  $\sum v_n$  ведут одинаково в смысле сходимости.

**Признак Даламбера.**

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда  $\sum u_n$  с положительными членами существует такое число  $q < 1$ , что для всех достаточно больших  $n$  выполняется неравенство

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ , то ряд  $\sum u_n$  сходится, если же для всех достаточно больших  $n$

выполняется условие  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ , то ряд  $\sum u_n$  расходится.

**Предельный признак Даламбера.**

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ , то при  $\rho < 1$  ряд сходится, а при  $\rho > 1$  – расходится. Если  $\rho = 1$ , то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

**Пример.** Определить сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ .

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

**Пример.** Определить сходимость ряда  $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Вывод: ряд сходится.

### **Признак Коши. (радикальный признак)**

Если для ряда  $\sum u_n$  с неотрицательными членами существует такое число  $q < 1$ , что для всех достаточно больших  $n$  выполняется неравенство  $\sqrt[n]{u_n} \leq q$ , то ряд  $\sum u_n$  сходится, если же для всех достаточно больших  $n$  выполняется неравенство  $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ , то ряд  $\sum u_n$  расходится.

**Следствие.** Если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ , то при  $\rho < 1$  ряд сходится, а при  $\rho > 1$  ряд расходится.

**Пример.** Определить сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2+1}{3n^2+5} \right)^n$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

**Пример.** Определить сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

### **Интегральный признак Коши.**

Если  $\varphi(x)$  – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке  $[1; \infty)$ , то ряд  $\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$  и несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} \varphi(x) dx$  одинаковы в смысле сходимости.

**Пример.** Ряд  $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится  $\alpha \leq 1$  т.к. соответствующий несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится  $\alpha \leq 1$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  называется **обобщенным гармоническим** рядом.

**Следствие.** Если  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  – непрерывные функции на интервале  $(a, b]$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = h$ ,  $h \neq 0$ , то интегралы  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b \varphi(x) dx$  ведут себя одинаково в смысле сходимости.

### **Знакопеременные ряды. (Знакопередающие ряды).**

Знакопередающийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$$

где  $u_n > 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

### **Признак Лейбница.**

Если у знакопередающегося ряда  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$  абсолютные величины  $u_i$  убывают  $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$  и общий член стремится к нулю  $u_n \rightarrow 0$ , то ряд сходится.

### **Абсолютная и условная сходимость рядов.**

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков)  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (1)

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \quad (2)$$

**Теорема.** Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

**Определение.** Ряд  $\sum u_n$  называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд  $\sum |u_n|$ .

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

**Определение.** Ряд  $\sum u_n$  называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд  $\sum |u_n|$  расходится.

### **Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.**

Пусть  $\sum u_n$  - знакопеременный ряд.

**Признак Даламбера.** Если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$ , то при  $\rho < 1$  ряд  $\sum u_n$

будет абсолютно сходящимся, а при  $\rho > 1$  ряд будет расходящимся. При  $\rho = 1$  признак не дает ответа о сходимости ряда.

**Признак Коши.** Если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$ , то при  $\rho < 1$  ряд  $\sum u_n$  будет абсолютно сходящимся, а при  $\rho > 1$  ряд будет расходящимся. При  $\rho = 1$  признак не дает ответа о сходимости ряда.

### ***Свойства абсолютно сходящихся рядов.***

1) **Теорема.** Для абсолютной сходимости ряда  $\sum u_n$  необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.

**Следствие.** Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.

5) Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно

$S$  и  $\sigma$ , то ряд, составленный из всех произведений вида  $u_i v_k$ ,  $i, k = 1, 2, \dots$  взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна  $S \cdot \sigma$  - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

### **Задания практической работы**

1. Выписать три первых члена ряда найти третью частичную сумму

1,11,21 а) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot n!};$$

б) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$



$$2,12,22 \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{n^2 \cdot (n-1)!};$$

$$3,13,23 \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n-5)!};$$

$$4,14,24 \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n \cdot (n+1)!};$$

$$5,15,25 \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n! (n+1)!};$$

$$6,16,26 \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n} \cdot 3^n};$$

$$7,17,27 \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2} n^2}{3^{2n-1}};$$

$$8,18,28 \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n} \cdot n!}{(2n)!};$$

$$9, 19,29 \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2};$$

$$10,20,30 \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (n+1)!}{(2n)!};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3}{(n^4 + 4)^2}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{\sqrt{n^3}}.$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}.$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1 + e^{n^2}}.$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 n}{2n \sqrt{n}}.$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2} \cdot \cos n}.$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos^2 n}{n}.$$

**2. Исследовать на сходимость, применяя необходимый признак сходимости**

$$1,11,21. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n+5}$$

$$6,16,26. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1) \cdot 2^n}$$

$$2,12,22. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n-1}$$

$$7,17,27. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$3,13,23. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5n+2}$$

$$8,18,28. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n}}$$

$$4,14,24. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 4n^2 + 1}{n^2 - 5n}$$

$$9,19,29. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7n+1}$$

$$5,15,25. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 + 1}{n^3 + 2n}$$

$$10,20,30. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3n-1}$$

**3. Исследовать на сходимость, используя признак Даламбера**

$$1,11,21. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

$$6,16,26. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}$$

$$2,12,22. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}$$

$$7,17,27. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$3,13,23. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{5^n}$$

$$8,18,28. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)}$$

$$4,14,24. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}$$

$$9,19,29. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$5,15,25. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3 \cdot 2^n}$$

$$10,20,30. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$$

### **Контрольные вопросы**

1. Определение числового ряда.
2. Свойства и виды рядов.
3. Определение суммы ряда.
4. Необходимый признак сходимости.
5. Признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши.

## Практическая работа № 12

по теме «Нахождение производной численным методом.»

**Цель:** научиться решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Теоретические сведения.**

**Определение.** Функция  $f(x, y)$  называется **однородной  $n$  – го измерения** относительно своих аргументов  $x$  и  $y$ , если для любого значения параметра  $t$  (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

**Пример.** Является ли однородной функция  $f(x, y) = x^3 + 3x^2y$ ?

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3 (x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x, y)$$

Таким образом, функция  $f(x, y)$  является однородной 3- го порядка.

**Определение.** Дифференциальное уравнение вида  $y' = f(x, y)$  называется **однородным**, если его правая часть  $f(x, y)$  есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  является однородным, если функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение  $y' = f(x, y)$ .

Т.к. функция  $f(x, y)$  – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Т.к. параметр  $t$  вообще говоря произвольный, предположим, что  $t = \frac{1}{x}$ . Получаем:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента  $u = \frac{y}{x}$ , т.е.

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y' = \varphi(u)$$

Далее заменяем  $y = ux$ ,

$$y' = u'x + ux'. \quad u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции  $u$ .

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию  $u$  на ее выражение через  $x$  и  $y$  и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

**Пример.** Решить уравнение  $y' = \frac{y}{x} \left( \ln \frac{y}{x} + 1 \right)$ .

Введем вспомогательную функцию  $u$ .

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Отметим, что введенная нами функция  $u$  всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее  $\ln u = \ln \frac{y}{x}$ .

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u \ln u + u; \quad u'x = u \ln u;$$

Разделяем переменные:  $\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x};$

Интегрируя, получаем:  $\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции  $y$ , получаем общее решение:  $y = xe^{Cx}$ .

### ***Уравнения, приводящиеся к однородным.***

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида  $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ .

Если определитель  $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ , то переменные могут быть разделены подстановкой

$$X = u + \alpha; \quad y = v + \beta;$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - решения системы уравнений  $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$

**Пример.** Решить уравнение  $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$ .

Получаем  $(x - 2y + 3)\frac{dy}{dx} = -2x - y + 1$ ;  $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y + 1}{x - 2y + 3}$ ;

Находим значение определителя  $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$ .

Решаем систему уравнений  $\begin{cases} -2x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} y = 1 - 2x \\ x - 2 + 4x + 3 = 0 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} x = -1/5 \\ y = 7/5 \end{cases}$ ;

Применяем подстановку  $x = u - 1/5$ ;  $y = v + 7/5$ ; в исходное уравнение:

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)dv + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)du = 0;$$

$$(u - 2v)dv + (2u + v)du = 0; \quad \frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{2v - u} = \frac{2 + v/u}{2v/u - 1};$$

Заменяем переменную  $\frac{v}{u} = t$ ;  $v = ut$ ;  $v' = t'u + t$ ; при подстановке в выражение,

записанное выше, имеем:  $t'u + t = \frac{2 + t}{2t - 1}$

**Разделяем переменные:**  $\frac{dt}{du}u = \frac{2 + t}{2t - 1} - t = \frac{2 + t - 2t^2 + t}{2t - 1} = \frac{2(1 + t - t^2)}{2t - 1}$ ;

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2t}{1 + t - t^2} dt, & \int \frac{du}{u} &= -\frac{1}{2} \int \frac{(1 - 2t)dt}{1 + t - t^2}; \\ -\frac{1}{2} \ln|1 + t - t^2| &= \ln|u| + \ln C_1 & \ln|1 + t - t^2| &= -2 \ln|C_1 u| \\ \ln|1 + t - t^2| &= \ln \left| \frac{C_2}{u^2} \right|; & 1 + t - t^2 &= \frac{C_2}{u^2}; \end{aligned}$$

Переходим теперь к первоначальной функции  $u$  и переменной  $x$ .

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y - 7/5}{x + 1/5} = \frac{5y - 7}{5x + 1}; \quad u = x + 1/5;$$

$$1 + \frac{5y - 7}{5x + 1} - \left( \frac{5y - 7}{5x + 1} \right)^2 = \frac{25C_2}{(5x + 1)^2};$$

$$(5x + 1)^2 + (5y - 7)(5x + 1) - (5y - 7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 49 - 1 + 7$$

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_2 + \frac{55}{25} = C;$$

Итого, выражение  $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$  является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

В случае если в исходном уравнении вида  $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$  определитель  $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ , то переменные могут быть разделены подстановкой

$$ax + by = t.$$

**Пример.** Решить уравнение  $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0$ .

Получаем  $2(x+y)\frac{dy}{dx} = -3x-3y+1$ ;  $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x-3y+1}{2x+2y} = -\frac{3x+3y-1}{2x+2y}$ ;

Находим значение определителя  $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6+6=0$ ;

Применяем подстановку  $3x+3y=t$ .  $\frac{dy}{dx} = \frac{t'}{3} - 1$ ;

Подставляем это выражение в исходное уравнение:

$$\frac{t'}{3} - 1 = -\frac{3(t-1)}{2t}; \quad 2t(t'-3) = -9t+9; \quad 2tt' = 6t-9t+9; \quad 2tt' = -3t+9;$$

Разделяем переменные:  $\frac{2t}{-3t+9} dt = dx$ ;  $\frac{t}{t-3} dt = -\frac{3}{2} dx$ ;

$$\int \left(1 + \frac{3}{t-3}\right) dt = -\frac{3}{2} \int dx; \quad t + 3\ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Далее возвращаемся к первоначальной функции  $y$  и переменной  $x$ .

$$2x+2y+2\ln|3(x+y-1)| = -x + C_2;$$

$$3x+2y+2\ln 3 + 2\ln|x+y-1| = C_2;$$

$$3x+2y+2\ln|x+y-1| = C;$$

таким образом, мы получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

### Задания практической работы

**Задание.** Решить однородное дифференциальное уравнение.

**В1.**  $xy+y^2 - (2x^2 + xy)y' = 0$

**В16.**  $xy+y^2 - (2x^2 + xy)y' = 0$

**В2.**  $(x-y)dx + xdy = 0$

**В17.**  $(x-y)dx + xdy = 0$

**В3.**  $(x^2 - xy)dy - y^2 dx = 0$

**В18.**  $(x^2 - xy)dy - y^2 dx = 0$

**В4.**  $xy^2y' = x^3 + y^3$

**В19.**  $xy^2y' = x^3 + y^3$

**В5.**  $(x-y)y dx = x^2 dy$

**В20.**  $(x-y)y dx = x^2 dy$

**B6.**  $xy^2y' = x^3 + y^3$

**B21.**  $xy^2y' = x^3 + y^3$

**B7.**  $xy+y^2 - (2x^2 + xy)y'=0$

**B22.**  $xy+y^2 - (2x^2 + xy)y'=0$

**B8.**  $(x-y)dx+xdy=0$

**B23.**  $(x-y)dx+xdy=0$

**B9.**  $(x^2-.xy)dy-y^2 dx=0$

**B24.**  $(x^2-.xy)dy-y^2 dx=0$

**B10.**  $xy^2y' = x^3 + y^3$

**B25.**  $xy^2y' = x^3 + y^3$

**B11.**  $(x-y)y dx = x^2 dy$

**B26.**  $(x-y)y dx = x^2 dy$

**B12.**  $xy^2y' = x^3 + y^3$

**B27.**  $xy^2y' = x^3 + y^3$

**B13.**  $4.xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B28.**  $4.xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B14.**  $(x-y)dx+xdy=0$

**B29.**  $(x-y)dx+xdy=0$

**B15.**  $(x^2-.xy)dy-y^2 dx=0$

**B30.**  $(x^2-.xy)dy-y^2 dx=0$

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется однородным уравнением первого порядка и его решение?

## Практическая работа № 13

по теме «Численное решение дифференциального уравнения»

**Цель:** научиться решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения

2. Задание

3. Лист А 4

4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Теоретические сведения**

**Определение.** Дифференциальное уравнение называется **линейным**

относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть  $Q(x)$  равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть  $Q(x)$  не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

$P(x)$  и  $Q(x)$ - функции непрерывные на некотором промежутке  $a < x < b$ .

**Линейные однородные дифференциальные уравнения.** Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

Общее решение:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

**Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.**



Для интегрирования линейных неоднородных уравнений ( $Q(x) \neq 0$ ) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

### **Метод Бернулли.**

(Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций  $y = uv$ . При

этом очевидно, что  $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$  - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \left( \frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция  $y = 2x^2$  может быть представлена как  $y = 1 \cdot 2x^2$ ;  $y = 2 \cdot x^2$ ;  $y = 2x \cdot x$ , и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение  $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$ .

Таким образом, возможно получить функцию  $u$ , проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \quad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \quad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции  $v$  подставим полученное выражение для функции  $u$  в исходное уравнение  $u \frac{dv}{dx} + v \left( \frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x)$  с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx} \frac{dv}{dx} = Q(x); \quad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию  $v$ :

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1; \quad v = \frac{1}{C} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения  $y = uv$ , которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x) dx} \cdot \frac{1}{C} \left( \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C_2 \right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$y = e^{-\int P(x) dx} \cdot \left( \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C_2 \right), \quad C_2 - \text{произвольный коэффициент.}$$

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

### **Метод Лагранжа.**

(Ларганж Жозеф Луи (1736-1813) - французский математик, през. Берлинской АН, поч. чл. Пет. АН (1776)).

**Метод Лагранжа** решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-\int P(x) dx}.$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную  $C_1$  некоторой функцией от  $x$ .

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x) dx} + C_1(x) e^{-\int P(x) dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x) dx} - C_1(x) P(x) e^{-\int P(x) dx} + P(x) C_1(x) e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x) dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию  $C_1(x)$ :

$$dC_1(x) = Q(x) e^{\int P(x) dx} dx;$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C;$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left( \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right).$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных дифференциальных уравнений различными методами и сравним результаты.

**Пример.** Решить уравнение  $x^2 y' + y = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$ .

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду:  $y' + \frac{1}{x^2} y = a e^{\frac{1}{x}}$ .

Применим полученную выше формулу:  $P = \frac{1}{x^2}$ ;  $Q = a e^{\frac{1}{x}}$ ;

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2} dx} \left( \int a e^{\frac{1}{x}} e^{\int \frac{1}{x^2} dx} dx + C \right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}} \left( \int a e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C \right) = e^{\frac{1}{x}} \left( \int a dx + C \right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}} (ax + C).$$

**Задание.** Решить линейное дифференциальное уравнение.

**B1.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B2.**  $y' + 2xy = x^3$

**B3.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B4.**  $xy' + y = x + 1$

**B5.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

**B6.**  $y' + y = x + 1$

**B7.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B8.**  $y' + 2xy = x^3$

**B9.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B10.**  $xy' + y = x + 1$

**B11.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

**B12.**  $xy' + y = x + 1$

**B13.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B14.**  $y' + 2xy = x^3$

**B15.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B16.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B17.**  $y' + 2xy = x^3$

**B18.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B19.**  $xy' + y = x + 1$

**B20.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

**B21.**  $xy' + y = x + 1$

**B22.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B23.**  $y' + 2xy = x^3$

**B24.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**B25.**  $xy' + y = x + 1$

**B26.**  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

**B27.**  $xy' + y = x + 1$

**B28.**  $xy' - xy = (1+x^2)e^x$

**B29.**  $y' + 2xy = x^3$

**B30.**  $(1+x^2)y' - xy = 2x$

**Задача 2.** Найти решение задачи Коши.

4.1.  $y' - y/x = x^2$ ,  $y(1) = 0$ . 4.2.

$y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ ,  $y(\pi/2) = 0$ .

4.3.  $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ,  $y(0) = 0$ . 4.4.

$y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ ,  $y(\pi/4) = 1/2$ .

4.5.  $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$ ,  $y(-1) = 3/2$ . 4.6.

$y' - \frac{1}{x+1} y = e^x (x+1)$ ,  $y(0) = 1$ .

4.7.  $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

4.8.  $y' + \frac{y}{x} = \sin x$ ,  $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$ .

4.9.  $y' + \frac{y}{2x} = x^2$ ,  $y(1) = 1$ .

4.10.

$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}$ ,  $y(0) = \frac{2}{3}$ .

4.11.  $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5$ ,  $y(2) = 4$ .

4.12.  $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x$ ,  $y(1) = e$ .

4.13.  $y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}$ ,  $y(1) = 1$ .

4.14.  $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$ ,  $y(1) = 4$ .

4.15.  $y' + \frac{2}{x} y = x^3$ ,  $y(1) = -5/6$ .

4.16.  $y' + \frac{y}{x} = 3x$ ,  $y(1) = 1$ .

4.17.  $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2$ ,  $y(1) = 3$ .

4.18.  $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$ ,  $y(1) = 1$ .

4.19.  $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$ ,  $y(1) = 1$ .

4.20.  $y' + 2xy = -2x^3$ ,  $y(1) = e^{-1}$ .

4.21.  $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$ ,  $y(0) = \frac{2}{3}$ .

4.22.  $y' + xy = -x^3$ ,  $y(0) = 3$ .

$$4.23 \ y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2, \ y(0) = 1.$$

$$4.24 \ y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x, \ y(0) = 1.$$

$$4.25. \ y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3, \ y(0) = 1/2.$$

$$4.26. \ y' - y \cos x = -\sin 2x, \ y(0) = 3.$$

$$4.27. \ y' - 4xy = -4x^3, \ y(0) = -1/2. \quad 4.28. \ y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \ y(1) = 1.$$

$$4.29. \ y' - 3x^2 y = x^2 (1 + x^3)/3, \ y(0) = 0.$$

$$4.30. \ y' - y \cos x = \sin 2x, \ y(0) = -1.$$

**Контрольные вопросы:**

1. Какое уравнение называется линейным уравнением первого порядка?
2. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением.
3. Что называется решением дифференциального уравнения.
4. Общее решение дифференциального уравнения.
5. Написать общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
6. Задача Коши.
7. Каков общий вид однородного дифференциального уравнения 1-го порядка?
8. Алгоритм решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.

## **Практическая работа № 14**

### **по теме «Решение задач на нахождение вероятности»**

**Цель:** научиться находить вероятность событий.

**Время выполнения** 90 минут

#### **Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения
2. Задание
3. Лист А 4
4. Калькуляторы

#### **Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание
2. Изучить теоретические сведения
3. Выполнить и оформить работу
4. Показать результаты преподавателю

#### **Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

#### **Теоретические сведения**

##### **Классическая вероятностная модель. Геометрическая вероятность**

**Задача 1.** В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?

**Решение.** Элементарными исходами здесь являются наборы, включающие 3 фрукта. Поскольку порядок фруктов безразличен, будем считать их выбор неупорядоченным (и бесповторным). Общее число элементарных исходов  $n = |\Omega|$  равно числу способов выбрать 3 фрукта из 9, т.е. числу сочетаний  $C_9^3$ .

Число благоприятствующих исходов  $m = |A|$  равно числу способов выбора 3 апельсинов из имеющихся 5, т.е.  $C_5^3$ . Тогда искомая вероятность

$$P(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{\frac{5!}{3!2!}}{\frac{9!}{3!6!}} = 0,12$$

**Задача 2.** Преподаватель предлагает каждому из трех студентов задумать любое число от 1 до 10. Считая, что выбор каждым из студентов любого числа из заданных равновозможен, найти вероятность того, что у кого-то из них задуманные числа совпадут.

**Решение.** Вначале подсчитаем общее количество исходов. Первый из студентов выбирает одно из 10 чисел и имеет  $n_1=10$  возможностей, второй тоже имеет  $n_2=10$  возможностей, наконец, третий также имеет  $n_3=10$  возможностей. В силу правила умножения общее число способов равно:  $n = n_1 \times n_2 \times n_3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ , т.е. все пространство содержит 1000 элементарных исходов. Для вычисления вероятности события  $A$  удобно перейти к противоположному событию, т.е. подсчитать количество тех случаев, когда все три студента задумывают разные числа. Первый из них по-прежнему имеет  $m_1=10$  способов выбора числа.

Второй студент имеет теперь лишь  $m_2=9$  возможностей, поскольку ему приходится заботиться о том, чтобы его число не совпало с задуманным числом первого студента. Третий студент еще более ограничен в выборе — у него всего  $m_3=8$  возможностей. Поэтому общее число комбинаций задуманных чисел, в которых нет совпадений, равно  $m=10 \cdot 9 \cdot 8=720$ . Случаев, в которых есть совпадения, остается 280. Следовательно, искомая вероятность равна  $P=280/1000=0,28$ .

Задача 3. Найти вероятность того, что в 8-значном числе ровно 4 цифры совпадают, а остальные различны.

Решение. Событие  $A=\{\text{восьмизначное число содержит 4 одинаковые цифры}\}$ .

Из условия задачи следует, что в числе пять различных цифр, одна из них повторяется. Число способов её выбора равно числу способов выбора одной цифры из 10 цифр. Эта цифра занимает любые 4 места в числе, что возможно сделать  $C_8^4$  способами, так как порядок здесь не важен. Оставшиеся 4 места занимают различные цифры из неиспользованных девяти, и так как число зависит от порядка расположения цифр, то число способов выбора четырех цифр равно числу размещений  $A_9^4$ . Тогда число благоприятствующих исходов  $|A|=10C_8^4 A_9^4$ . Всего же способов составления 8-значных чисел равно  $|\Omega|=10^8$ .

Искомая вероятность равна

$$P = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10C_8^4 A_9^4}{10^8} = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{9!}{5!} \cdot \frac{1}{10^7} = 0,021168$$

Задача 4. Шесть клиентов случайным образом обращаются в 5 фирм. Найти вероятность того, что хотя бы в одну фирму никто не обратится.

Решение. Рассмотрим противоположное событие  $\bar{A}$ , состоящее в том, что в каждую из 5 фирм обратился клиент, тогда в какую-то из них обратились 2 клиента, а в остальные 4 фирмы – по одному клиенту. Таких возможностей

$|\bar{A}| = 5 \times N_6(2,1,1,1,1) = \frac{5 \cdot 6!}{1!1!1!1!2!}$ . Общее количество способов распределить 6 клиентов

по 5 фирмам  $|\Omega|=5^6$ . Отсюда  $P(\bar{A}) = \frac{5 \cdot 6!}{1!1!1!1!2!} \cdot \frac{1}{5^6} = 0,1152$ . Следовательно,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,8848$$

Задача 5. Пусть в урне имеется  $N$  шаров, из них  $M$  белых и  $N-M$  черных. Из урны извлекается  $n$  шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно  $m$  белых шаров.

Решение. Так как порядок элементов здесь несущественен, то число всех возможных наборов объема  $n$  из  $N$  элементов равно числу сочетаний  $C_N^n$ .

Число испытаний, которые благоприятствуют событию  $A$  – " $m$  белых шаров,  $n-m$  черных", равно  $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ , и, следовательно, искомая вероятность равна  $P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ .

Задача 6. Точку наудачу бросили на отрезок  $[0; 2]$ . Какова вероятность ее попадания в отрезок  $[0,5; 1,4]$ ?

Решение. Здесь пространство элементарных исходов весь отрезок  $\Omega = [0; 2]$ , а множество благоприятствующих исходов  $A = [0,5; 1,4]$ , при этом длины этих отрезков равны  $l(\Omega) = 2$  и  $l(A) = 0,9$  соответственно. Поэтому

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{0,9}{2} = 0,45$$

Задача 7 (задача о встрече). Два лица А и В условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет другого в течении 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи лиц А и В, если приход каждого из них может произойти наудачу в течении указанного часа и моменты прихода независимы?

Решение. Обозначим момент прихода лица А через  $x$  и лица В – через  $y$ . Для того, чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы  $|x - y| \leq 20$ . Изобразим  $x$  и  $y$  как координаты на плоскости, в качестве единицы масштаба выберем минуту. Всевозможные исходы представляются точками квадрата со стороной 60, а благоприятствующие встрече располагаются в заштрихованной области. Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры (рис. 2.1) к площади всего квадрата:  $P(A) = (60^2 - 40^2)/60^2 = 5/9$ .

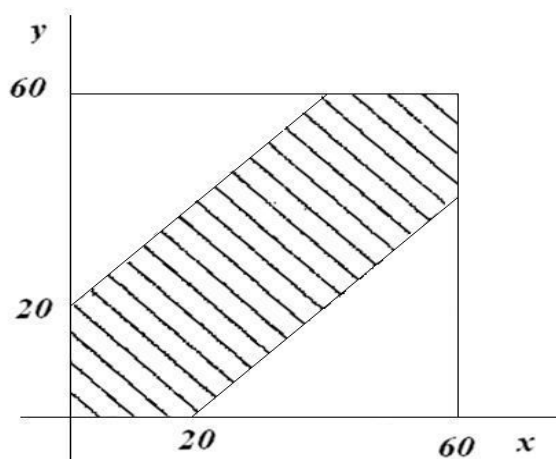


Рис. 2.1.

## Основные формулы теории вероятностей

**Задача 1.** В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность, что пуговицы будут одноцветными?

Решение. Событие  $A = \{\text{вынуты пуговицы одного цвета}\}$  можно представить в виде суммы  $A = A_1 + A_2$ , где события  $A_1$  и  $A_2$  означают выбор пуговиц красного и синего цвета соответственно. Вероятность вытащить две красные пуговицы

равна  $P(A_1) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}$ , а вероятность вытащить две синие пуговицы  $P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_{15}^2}$ . Так

как события  $A_1$  и  $A_2$  не могут произойти одновременно, то в силу теоремы сложения



$$P(A) = \frac{C_{10}^2 + C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{\frac{10!}{2!8!} + \frac{5!}{2!3!}}{\frac{15!}{2!13!}} = 0,524.$$

**Задача 2.** Среди сотрудников фирмы 28% знают английский язык, 30% – немецкий, 42% – французский; английский и немецкий – 8%, английский и французский – 10%, немецкий и французский – 5%, все три языка – 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный сотрудник фирмы: а) знает английский или немецкий; б) знает английский, немецкий или французский; в) не знает ни один из перечисленных языков.

*Решение.* Обозначим через А, В и С события, заключающиеся в том, что случайно выбранный сотрудник фирмы владеет английским, немецким или французским соответственно. Очевидно, доли сотрудников фирмы, владеющих теми или иными языками, определяют вероятности этих событий. Получаем:

$$\text{а) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,28 + 0,3 - 0,08 = 0,5;$$

$$\text{б) } P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(AB) + P(AC) + P(BC)) + P(ABC) = 0,28 + 0,3 + 0,42 - (0,08 + 0,1 + 0,05) + 0,03 = 0,8;$$

$$\text{в) } 1 - P(A \cup B \cup C) = 0,2.$$

**Задача 3.** В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – мальчик, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

*Решение.* Пусть  $A = \{\text{старший ребенок – мальчик}\}$ ,  $B = \{\text{в семье есть дети обоего пола}\}$ . Будем считать, что рождение мальчика и рождение девочки – равновероятные события. Если рождение мальчика обозначить буквой М, а рождение девочки – Д, то пространство всех элементарных исходов состоит из четырех пар:  $\Omega = \{MM, MD, DM, DD\}$ . В этом пространстве лишь два исхода (МД и ДМ) отвечают событию В. Событие АВ означает, что в семье есть дети обоего пола. Старший ребенок – мальчик, следовательно, второй (младший) ребенок – девочка. Этому событию АВ отвечает один исход – МД. Таким образом,  $|AB| = 1$ ,  $|B| = 2$  и

$$P(A | B) = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

**Задача 4.** Мастер, имея 10 деталей, из которых 3 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

*Решение.* Событие  $A = \{\text{мастер проверил ровно две детали}\}$  означает, что при такой проверке первая деталь оказалась нестандартной, а вторая – стандартная. Значит,  $A = A_1 A_2$ , где  $A_1 = \{\text{первая деталь оказалась нестандартной}\}$  и  $A_2 = \{\text{вторая деталь – стандартная}\}$ . Очевидно, что вероятность события  $A_1$  равна  $P(A_1) = 3/10$ , кроме того,  $P(A_2 | A_1) = 7/9$ , так как перед взятием второй детали у мастера осталось 9 деталей, из которых только 2 нестандартные и 7 стандартных. По теореме умножения

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = 7/30.$$

**Задача 5.** В одном ящике 3 белых и 5 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 4 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынута по одному шару.

*Решение.* Событие  $A = \{\text{хотя бы из одного ящика вынут белый шар}\}$  можно представить в виде суммы  $A = A_1 + A_2$ , где события  $A_1$  и  $A_2$  означают появление белого шара из первого и второго ящика соответственно. Вероятность вытащить белый шар из первого ящика равна  $P(A_1) = 3/8$ , а вероятность вытащить белый шар из второго ящика  $P(A_2) = 6/10$ . Кроме того, в силу независимости  $A_1$  и  $A_2$  имеем:  $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{40}$ . По теореме сложения получаем:

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 3/8 + 6/10 - 9/40 = 3/4.$$

**Задача 6.** Три экзаменатора принимают экзамен по некоторому предмету у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй — 3 студентов, а третий — 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго — только 10%, у третьего — 70%. Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

*Решение.* Обозначим через  $H_1, H_2, H_3$  гипотезы, состоящие в том, что слабо подготовившийся студент отвечал первому, второму и третьему экзаменатору соответственно. По условию задачи

$$P(H_1) = 6/30 = 0,2, \quad P(H_2) = 3/30 = 0,1, \quad P(H_3) = 21/30 = 0,7.$$

Пусть событие  $A = \{\text{слабо подготовившийся студент сдал экзамен}\}$ . Тогда снова в силу условия задачи

$$P(A | H_1) = 0,4, \quad P(A | H_2) = 0,1, \quad P(A | H_3) = 0,7.$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,7 = 0,58.$$

**Задача 7.** Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы А, В, С. На долю фирмы А приходится 50% общего объема поставок, В – 30% и С – 20%. Из практики известно, что среди поставляемых фирмой А деталей 10% бракованных, фирмой В – 5% и фирмой С – 6%. Какова вероятность, что взятая наугад деталь окажется годной?

*Решение.* Пусть событие G – появление годной детали. Вероятности гипотез о том, что деталь поставлена фирмами А, В, С, равны соответственно  $P(A)=0,5$ ,  $P(B)=0,3$ ,  $P(C)=0,2$ . Условные вероятности появления при этом годной детали равны  $P(G|A)=0,9$ ,  $P(G|B)=0,95$ ,  $P(G|C)=0,94$  (как вероятности противоположных событий к появлению бракованной). По формуле полной вероятности получаем:

$$P(G) = 0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 0,94 = 0,923.$$

**Задача 8** (см. задачу 6). Пусть известно, что студент не сдал экзамен, т.е. получил оценку «неудовлетворительно». Кому из трех преподавателей вероятнее всего он отвечал?

*Решение.* Вероятность получить «неуд» равна  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,58 = 0,42$ . Требуется вычислить условные вероятности. По формулам Байеса получаем:

$$P(H_1 | \bar{A}) = \frac{P(H_1) \cdot P(\bar{A} | H_1)}{P(\bar{A})} = \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,42} = 0,285, \quad \text{и аналогично,}$$

$$P(H_2 | \bar{A}) = \frac{0,1 \cdot 0,9}{0,42} = 0,214, \quad P(H_3 | \bar{A}) = \frac{0,7 \cdot 0,3}{0,42} = 0,5.$$

Отсюда следует, что, вероятнее всего, слабо подготовившийся студент сдавал экзамен третьему экзаменатору.

## Практическая работа № 15

по теме «Случайная величина. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины»

**Цель:** научиться находить случайные величины.

**Время выполнения** 90 минут

**Материальное обеспечение**

1. Теоретические сведения

2. Задание

3. Лист А 4

4. Калькуляторы

**Порядок выполнения работы**

1. Изучить задание

2. Изучить теоретические сведения

3. Выполнить и оформить работу

4. Показать результаты преподавателю

**Домашнее задание**

1. Подготовить ответы на контрольные вопросы

**Теоретические сведения**

Задача 1. В связке из 3 ключей только один ключ подходит к двери. Ключи перебирают до тех пор, пока не отыщется подходящий ключ. Построить закон распределения для случайной величины  $\xi$  – числа опробованных ключей.  
Решение. Число опробованных ключей может равняться 1, 2 или 3. Если испытали только один ключ, это означает, что этот первый ключ сразу подошел к двери, а вероятность такого события равна  $1/3$ . Итак,  $P(\xi = 1) = 1/3$ . Далее, если опробованных ключей было 2, т.е.  $\xi = 2$ , это значит, что первый ключ не подошел, а второй – подошел. Вероятность этого события равна  $2/3 \times 1/2 = 1/3$ . То есть,  $P(\xi = 2) = 1/3$ . Аналогично вычисляется вероятность  $P(\xi = 3) = 1/3$ . В результате получается следующий ряд распределения:

$\xi$	1	2	3
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Задача 2. Построить функцию распределения  $F\xi(x)$  для случайной величины  $\xi$  из задачи 1.

Решение. Случайная величина  $\xi$  имеет три значения 1, 2, 3, которые делят всю числовую ось на четыре промежутка:  $(-\infty, 1), [1, 2), [2, 3), [3, +\infty)$ . Если  $x < 1$ , то неравенство  $\xi \leq x$  невозможно (левее  $x$  нет значений случайной величины  $\xi$ ) и значит, для такого  $x$  функция  $F\xi(x) = 0$ .

Если  $1 \leq x < 2$ , то неравенство  $\xi \leq x$  возможно только если  $\xi = 1$ , а вероятность такого события равна  $1/3$ , поэтому для таких  $x$  функция распределения  $F\xi(x) = 1/3$ .

Если  $2 \leq x < 3$ , неравенство  $\xi \leq x$  означает, что или  $\xi = 1$ , или  $\xi = 2$ , поэтому в этом случае вероятность  $P(\xi \leq x) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 2/3$ , т.е.  $F\xi(x) = 2/3$ .

И, наконец, в случае  $x \geq 3$  неравенство  $\xi \leq x$  выполняется для всех значений случайной величины  $\xi$ , поэтому  $P(\xi \leq x) = P(\xi=1) + P(\xi=2) + P(\xi=3) = 1$ , т.е.  $F_\xi(x) = 1$ . Итак, мы получили следующую функцию:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/3, & 1 \leq x < 2 \\ 2/3, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Задача 3. Совместный закон распределения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  задан с помощью таблицы

$\xi \backslash \eta$	1	2
-1	1/16	3/16
0	1/16	3/16
1	1/8	3/8

Вычислить частные законы распределения составляющих величин  $\xi$  и  $\eta$ .

Определить, зависимы ли они. Вычислить вероятность  $P(\xi + \eta \geq 2)$ .

Решение. Частное распределение для  $\xi$  получается суммированием вероятностей в строках:

$$P(\xi = -1) = P(\xi = -1, \eta = 1) + P(\xi = -1, \eta = 2) = 1/16 + 3/16 = 1/4;$$

$$P(\xi = 0) = P(\xi = 0, \eta = 1) + P(\xi = 0, \eta = 2) = 1/16 + 3/16 = 1/4;$$

$$P(\xi = 1) = P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 1, \eta = 2) = 1/8 + 3/8 = 1/2.$$

Аналогично получается частное распределение для  $\eta$ :

$$P(\eta = 1) = 1/16 + 1/16 + 1/8 = 1/4;$$

$$P(\eta = 2) = 3/16 + 3/16 + 3/8 = 3/4.$$

Полученные вероятности можно записать в ту же таблицу напротив соответствующих значений случайных величин:

$\xi \backslash \eta$	1	2	$p_\xi$
-1	1/16	3/16	1/4
0	1/16	3/16	1/4
1	1/8	3/8	1/2
$p_\eta$	1/4	3/4	1

Теперь ответим на вопрос о независимости случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ . С этой целью для каждой клетки совместного распределения вычислим произведение  $P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)$  (т.е. сумм по соответствующей строке и столбцу) и сравним его со значением вероятности  $P(\xi = x_i, \eta = y_j)$  в этой клетке. Например, в клетке для значений  $\xi = -1$  и  $\eta = 1$  стоит вероятность 1/16, а произведение соответствующих частных вероятностей  $1/4 \times 1/4$  равно 1/16, т.е. совпадает с совместной

вероятностью. Это условие так же проверяется в оставшихся пяти клетках, и оно оказывается верным во всех. Следовательно, случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы.

Заметим, что если бы наше условие нарушалось хотя бы в одной клетке, то величины следовало бы признать зависимыми.

Для вычисления вероятности  $P(\xi + \eta \geq 2)$  отметим клетки, для которых выполнено условие  $\xi + \eta \geq 2$ . Таких клеток всего три, и соответствующие вероятности в этих клетках равны  $1/8, 3/16, 3/8$ . Их сумма равна  $11/16$ , это и есть искомая вероятность. Вычисление этой вероятности можно записать так:  $P(\xi + \eta \geq 2) = P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 0, \eta = 2) + P(\xi = 1, \eta = 2) = 1/8 + 3/16 + 3/8 = 11/16$ .

Задача 4. Пусть случайная величина  $\xi$  имеет следующий закон распределения:

$\xi$	-1	0	2
P	1/4	1/4	1/2

Вычислить математическое ожидание  $M\xi$ , дисперсию  $D\xi$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma$ .

Решение. По определению математическое ожидание  $\xi$  равно

$$M\xi = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = -1 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4 = 1/4$$

Далее

$$M\xi^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot 1/4 + 0^2 \cdot 1/4 + 2^2 \cdot 1/4 = 5/4$$

а потому

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 5/4 - 1/16 = 19/16$$

Среднее квадратическое отклонение  $\sigma = \sqrt{D\xi} = \sqrt{19}/4$ .

Задача 5. Для пары случайных величин из задачи 3 вычислить  $M(\xi\eta)$ .

Решение. Воспользуемся формулой  $M(\xi\eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$ . А именно, в каждой клетке таблицы выполняем умножение соответствующих значений  $x_i$  и  $y_i$ , результат умножаем на вероятность  $p_{ij}$ , и все это суммируем по всем клеткам таблицы. В итоге получаем:

$$M(\xi\eta) = -1 \cdot 1 \cdot 1/16 + (-1) \cdot 2 \cdot 3/16 + 0 \cdot 1 \cdot 1/16 + 0 \cdot 2 \cdot 3/16 + 1 \cdot 1 \cdot 1/8 + 1 \cdot 2 \cdot 3/8 = -1/16 - 3/8 + 1/8 + 3/4 = 7/16.$$

Задача 6. Для пары случайных величин из задачи 3 вычислить ковариацию  $\text{cov}(\xi, \eta)$ .

Решение. В предыдущей задаче уже было вычислено математическое ожидание  $M\xi\eta = 7/16$ . Осталось вычислить  $M\xi$  и  $M\eta$ . Используя полученные в решении задачи 3 частные законы распределения, получаем

$$M\xi = -1 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 = 1/4, \quad M\eta = 1 \cdot 1/4 + 2 \cdot 3/4 = 7/4,$$

и значит,

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta = 7/16 - 1/4 \cdot 7/4 = 0,$$

чего и следовало ожидать вследствие независимости случайных величин.

Задача 7. Случайный вектор  $(\xi, \eta)$  принимает значения  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(-1,0)$ ,  $(0,1)$  и  $(0,-1)$  равновероятно. Вычислить ковариацию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .

Показать, что они зависимы.

Решение. Поскольку  $P(\xi=0)=3/5$ ,  $P(\xi=1)=1/5$ ,  $P(\xi=-1)=1/5$ ;  $P(\eta=0)=3/5$ ,  $P(\eta=1)=1/5$ ,  $P(\eta=-1)=1/5$ , то  $M\xi=3/5 \times 0 + 1/5 \times 1 + 1/5 \times (-1) = 0$  и  $M\eta=0$ ;  $M(\xi\eta)=0 \times 0 \times 1/5 + 1 \times 0 \times 1/5 - 1 \times 0 \times 1/5 + 0 \times 1 \times 1/5 - 0 \times 1 \times 1/5 = 0$ .

Получаем  $\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta = 0$ , и случайные величины некоррелированы. Однако они зависимы. Пусть  $\xi=1$ , тогда условная вероятность события  $\{\eta=0\}$  равна  $P(\eta=0|\xi=1)=1$  и не равна безусловной  $P(\eta=0)=3/5$ , или вероятность  $\{\xi=0, \eta=0\}$  не равна произведению вероятностей:  $P(\xi=0, \eta=0)=1/5 \neq P(\xi=0)P(\eta=0)=9/25$ . Следовательно,  $\xi$  и  $\eta$  зависимы.

Задача 8. Случайные приращения цен акций двух компаний за день  $\xi$  и  $\eta$  имеют совместное распределение, заданное таблицей:

$\xi \backslash \eta$	-1	+1
-1	0,3	0,2
+1	0,1	0,4

Найти коэффициент корреляции.

Решение. Прежде всего вычисляем  $M\xi\eta=0,3-0,2-0,1+0,4=0,4$ . Далее находим частные законы распределения  $\xi$  и  $\eta$ :

$\xi \backslash \eta$	-1	+1	$p_\xi$
-1	0,3	0,2	0,5
+1	0,1	0,4	0,5
$p_\eta$	0,4	0,6	

Определяем  $M\xi=0,5-0,5=0$ ;  $M\eta=0,6-0,4=0,2$ ;  $D\xi=1$ ;  $D\eta=1-0,22=0,96$ ;  $\text{cov}(\xi, \eta)=0,4$ . Получаем

$$\rho = \frac{0,4}{\sqrt{1} \sqrt{0,96}} \approx 0,408$$

Задача 9. Случайные приращения цен акций двух компаний за день имеют дисперсии  $D\xi=1$  и  $D\eta=2$ , а коэффициент их корреляции  $\rho=0,7$ . Найти дисперсию приращения цены портфеля из 5 акций первой компании и 3 акций второй компании.

Решение. Используя свойства дисперсии, ковариации и определение коэффициента корреляции, получаем:

$$D(5\xi + 3\eta) = 5^2 D\xi + 3^2 D\eta + 2 \cdot 5 \cdot 3 \rho \sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta} = 25 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 30 \cdot 0,7 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \approx 72,7$$

Задача 10. Распределение двумерной случайной величины задано таблицей:

$\eta \backslash \xi$	1	3	4	8
3	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,30	0,10	0,03	0,07

Найти условное распределение и условное математическое ожидание  $\eta$  при  $\xi=1$ .

Решение. Условное математическое ожидание равно

$$M(\eta | \xi = x_1) = y_1 P_{\xi|\eta}(y_1 | x_1) + y_2 P_{\xi|\eta}(y_2 | x_1).$$

Из условия задачи найдем распределение составляющих  $\eta$  и  $\xi$  (последний столбец и последняя строка таблицы).

$\eta \backslash \xi$	1	3	4	8	$P_\eta$
3	0,15	0,06	0,25	0,04	0,50
6	0,30	0,10	0,03	0,07	0,50
$P_\xi$	0,45	0,16	0,28	0,11	1

Поскольку  $P_\xi(x_1) = P(x_1, y_1) + P(x_1, y_2) = 0,15 + 0,30 = 0,45$ , то условные вероятности находятся по формулам

$$P_{\xi|\eta}(y_1 | x_1) = \frac{P(x_1, y_1)}{P_\xi(x_1)} = \frac{0,15}{0,45} = \frac{1}{3}, \quad P_{\xi|\eta}(y_2 | x_1) = \frac{P(x_1, y_2)}{P_\xi(x_1)} = \frac{0,30}{0,45} = \frac{2}{3},$$

а искомое условное математическое ожидание равно  $M(\eta | \xi = 1) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5$ .



## **Перечень рекомендуемых учебных изданий, интернет-ресурсов, дополнительной литературы**

### **Основные источники:**

- 1) Григорьев В.П. «Элементы высшей математики», 2019 ОНЦ «Академия».
- 2) Григорьев В.П. «Сборник задач по высшей математике», 2019 ОНЦ «Академия».
- 3) Омельченко В. П., Математика: учебное пособие / Омельченко В. П., Курбатова Э. В. -Ростов н/Д.: Феникс, 2018.
- 4) Богомолов Н.В. Практические занятия по высшей математике. - М.: Высшая школа, 2020.
- 5) Подольский В.А. и др. Сборник задач по математике для техникумов. - М.: Высшая школа, 2019.
- 6) Валуцэ И.И. и др. Математика для техникумов на базе средней школы: учеб. пособ. - М.: Наука, 2019.
- 7) Дадаян А.А. Математика: учеб. - М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2018  
Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа: В 2-х частях, учеб. /Каченовский М.И. и др. под ред. Г.Н. Яковлева. - М.: Наука, 2018.

### **Дополнительные источники:**

- 1) Высшая математика для экономистов. Под ред. Н. Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2019
- 2) Спирина М.С. Дискретная математика: учеб. - М.: Академия, 2020.
- 3) Гончарова Г.А., Мочалин А.А. Элементы дискретной математики: учеб. пособ.- М.: Форум: ИНФРА-М, 2019.

### **Интернет-ресурсы**

- 1) [www.fcior.edu.ru](http://www.fcior.edu.ru) (Информационные, тренировочные и контрольные материалы)
- [www.school-collection.edu.ru](http://www.school-collection.edu.ru) (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).
- 2) <http://www.mathnet.spb.ru/>
- 3) <http://www.exponenta.ru/educat/class/class.asp>
- 4) <http://www.mathem.h1.ru/index.html>
- 5) [http://www.bymath.net/studyguide/tri/tri\\_topics.html](http://www.bymath.net/studyguide/tri/tri_topics.html)
- 6) <http://festival.1september.ru/>